DIE NATURWISSENSCHAFTEN

18. Jahrgang | 19. Dezember 1930 | Heft 51

Über den Einfluß von Hilberts Pariser Vortrag über „Mathematische Probleme" auf die Entwicklung der Mathematik in den letzten dreißig Jahren[1].

Von Ludwig Bieberbach, Berlin.

Es war eine schöne Idee des Vorstandes unserer Gesellschaft, insbesondere des Herrn Blaschke, daß heute in besonderer Form des größten lebenden Gelehrten gedacht werden soll, den diese Stadt hervorgebracht hat, in deren Mauern er aufwuchs und zur Größe heranreifte. David Hilbert war gerade im Zenit seines Ruhmes angelangt, als er anläßlich des zweiten internationalen Mathematikerkongresses 1900 zu Paris den folgenschweren Vortrag hielt, dessen Auswirkungen hier geschildert werden sollen (Hilbert) (1)[2]. Hilberts große Arbeiten zur Invariantentheorie lagen seit Jahren vor, der Zahlentheorie hatte er durch sein Wirken einen neuen Maßstab aufgeprägt. Gerade hatte seine Behandlung des Dirichletschen Prinzips der Analysis neue Wege gewiesen. Gerade hatte er in seinen Grundlagen der Geometrie die axiomatische Methode geschaffen. Daneben hatte er fast alle Gebiete mathematischen Wirkens durchdacht und durchmustert, um sich ein Bild davon zu machen, wo ein Forscher wohl einsetzen könne, der seiner Arbeitskraft eine möglichst eindringliche Wirkung beschieden wissen wollte. Der Niederschlag solchen Suchens ist der Pariser Vortrag, in dem er 23 der von ihm vorgefundenen Probleme seinen Fachgenossen vorlegt. Man mag auf den ersten Blick den Wert solchen Beginnens skeptischen Sinnes betrachten. Denn „es ist schwierig und oft unmöglich, den Wert eines Problemes im Voraus richtig zu beurteilen". Aber es gibt allgemeine Merkmale, die dem kundigen Blick ein gutes mathematisches Problem kennzeichnen. Das Problem sei klar und leicht faßlich, damit es uns anzieht, es sei schwierig, damit es uns reizt, es sei nicht völlig unzugänglich, damit es unserer Anstrengung nicht spotte. Hilberts Erfahrung verbürgte seinen Problemen diese von ihm selbst geforderten Eigenschaften. Sein überlegener Ruhm gab die psychologischen Voraussetzungen für die Wirksamkeit einer Bekanntgabe der Probleme. In der Tat konnte jeder eine Ehre darin finden, sich mit einer Frage zu befassen, die von vornherein des Interesses Hilberts sicher schien. Daß dieser letzte Rest von Autoritätsglaube, den man noch bei Mathematikern findet, gut angebracht war, lehrt der Gewinn, den Hilberts Probleme der Wissenschaft brachten. Und der entscheidet ja doch letzter Hand über ihren Wert.

Gestalt und Probleme einer Wissenschaft bestimmen einander wechselseitig. In Problemlage und Ansichten über die Gründe mathematischer Sicherheit kann man so drei Epochen unterscheiden, je nach der Bedeutung, die man Anschauung und Denken als Quellen mathematischer Erkenntnis zuerteilt. Die erste: Solange noch die neuere Mathematik ihre Anregungen zu einem guten Teil den Anwendungsgebieten verdankte, suchte sie ihre Sicherheit gleich den Naturwissenschaften in der Bestätigung durch die Erfahrung, mag sich dieselbe nun auf den Raum oder auf das Reich der natürlichen Zahlen beziehen. So sieht Lobatschefskij das Hauptergebnis seiner nichteuklidischen Geometrie darin, daß es nun endgültig dem Experimente überlassen bleibt, festzustellen, ob in der Wirklichkeit die euklidische oder eine andere Geometrie gilt, oder besser, daß die Entscheidung dieser Frage jedenfalls nun der mathematischen Deduktion entrückt ist. Hebt doch auch Gauss bei Schilderung seiner Theorie der komplexen Zahlen ausdrücklich hervor: „Hier ist also die Nachweisbarkeit einer anschaulichen Bedeutung von $\sqrt{-1}$ vollkommen gerechtfertigt, und mehr bedarf es nicht, um diese Größe in das Gebiet der Gegenstände der Arithmetik zuzulassen"; Felix Klein steht auf der Wende der Zeiten. Selbst ein glühender Verfechter des Wertes der Anschauung als Quelle mathematischer Erkenntnis, hat er doch schon durch sein Erlanger Programm den Gedanken der Isomorphie verschiedener mathematischer Gebiete aufgebracht. Der Gedanke, gemeinsame Züge verschiedener mathematischer Gebiete zu finden, um so ein Gebiet für das andere nutzbar zu machen, beherrscht viele seiner Arbeiten. Sein an den älteren Übertragungsprinzipien orientiertes Vorgehen bedeutet das Herausheben des gemeinsamen abstrakten Gehaltes verschiedener mathematischer Disziplinen. Klein hat dadurch auch an seinem Teil die moderne axiomatische Richtung vorbereitet. Ihr kommt es nicht auf die anschauliche Bedeutung der mathematischen Gegenstände, sondern auf das widerspruchsfreie Gefüge ihrer Zusammenhänge in erster Linie an. Klein vermittelt so einen Übergang zur dritten Epoche. Zunächst mag noch von der zweiten die Rede sein.

Trübe Erfahrungen, die der Mathematiker mit einer Verwechslung von Anschauung und Denken, von Vorstellung und Begriff machte, haben nie ihren Eindruck verfehlt. Wie evident erscheint z. B. die Feststellung, daß eine geschlossene Kurve ohne Doppelpunkte die Ebene in zwei Teile zer-

[1] Vortrag, gehalten auf der 91. Versammlung der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte zu Königsberg i. Pr. am 8. September 1930.

[2] Die den Namen beigesetzten Nummern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluß.

lege. Und wie leicht ist es, diese Anschauung zu widerlegen. Genügt es doch, daß man einen einfachen Kurvenbogen nach beiden Seiten verlängert und beide Fortsetzungen, ohne daß sie sich einander treffen, spiralartig um ein und denselben Kreis herumwindet (BROUWER) (1). Wie drängt ein solches Beispiel zur begrifflichen Klärung der Widersprüche, in die eine nicht vom begrifflichen Denken gezügelte Anschauung sich hier verstricken muß. Auch vor KUMMERS Theorie der idealen Zahlen stand die anschauliche und doch falsche Selbstverständlichkeit von der Eindeutigkeit der Zerlegung in Primfaktoren für einen beliebigen Zahlkörper. Die vor WEIERSTRASS übliche Schlußweise des DIRICHLETschen Prinzips war ebenso falsch, wie sie selbstverständlich schien. Bekanntlich ging sie davon aus, daß natürlich eine Funktion existiere, welche unter allen Funktionen gegebener Werte am Rande eines Bereiches dem über den Bereich erstreckten Doppelintegral

$$\iint \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy$$

einen möglichst kleinen Wert erteile. WEIERSTRASS konnte Beispiele ähnlicher Integrale angeben, wo solche Minimalfunktionen nicht existieren. Warum soll nun im Falle jenes DIRICHLETschen Integrales ein Minimum existieren, während es in anderen Fällen fehlt? Die Anschauung vermochte nicht, das Woher ihrer Gewißheit solchen neugierigen Fragern zu entschleiern, zumal sich solche Frager mit dem Hinweis auf physikalische Analogien nicht begnügten. Sie mußte sich durch schlau konstruierte Beispiele matt setzen lassen. Fast jeder Mathematiker hat solchen Trug der Anschauung erlebt.

Gewitzigt durch solche und ähnliche Erfahrungen suchten im ausgehenden neunzehnten Jahrhundert zuerst CANTOR, DEDEKIND, WEIERSTRASS der Analysis ein begrifflich einwandfreies Fundament zu schaffen. Was früher anschaulich evident erschien, wird begrifflich gefaßt; den lebenswarmen Beziehungen treten begriffliche Schemen zur Seite. Was so abstrakt gefaßt ist, verallgemeinert der Verstand. An vielen Lehrbüchern jener Jahre merkt man noch heute, wie unerträglich vielen ans naiv Anschauliche gewöhnten Zeitgenossen die Umstellung aufs Begriffliche erschien.

Aber nun schien es im Laufe der Entwicklung fast, als habe man den Teufel durch Beelzebub ausgetrieben. Es ist, wie wenn jede menschliche Tätigkeit sich selber erwürgen müsse, wenn sie zu konsequent und einseitig betrieben wird. So verlangten die Klippen der Anschauung eine Läuterung durch das Denken. Doch das Denken für sich verstrickt uns auch wieder in Ungereimtheiten, wenn wir ihm zu vorbehaltlos trauen. Das lehrten die Antinomien, die im Gefolge der CANTORschen Mengenlehre auftraten. Versteht man mit CANTOR unter einer Menge eine „Zusammenfassung M von wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen", so erscheint es denkbar, die Menge aller der Mengen zu betrachten, die sich nicht selbst als Element enthalten. Die Frage aber, ob diese Menge sich selber als Element enthalte, kann weder mit ja noch mit nein beantwortet werden. Und doch meinen wir, einer von beiden Fällen müsse vorliegen, es gebe keine dritte Möglichkeit. Oder liegt schon im CANTORschen Mengenbegriff, der so einfach schien, ein innerer Widerspruch versteckt? Diese RUSSELsche Paradoxie stammt aus 1903. Wohl aber war zur Zeit des HILBERTschen Vortrages eine andere Antinomie von BURALI-FORTI aus 1897 schon bekannt.

HILBERT sieht nun in der axiomatischen Methode, welche die dritte Epoche einleitet, das geeignete Mittel, aus den Schwierigkeiten herauszukommen. Sie scheint auch berufen, zwischen dem Wunsch nach Anschaulichkeit und dem Verlangen nach Strenge der Beweisführung und schließlich auch zwischen Anschauung und Denken als Erkenntnisquelle zu vermitteln. Zunächst zwar scheint die Axiomatik ein Kind der zweiten Epoche und so aller Anschaulichkeit abhold. Ihr Ziel ist zunächst ein rein begriffliches: Die Heraushebung einiger weniger Grundbeziehungen zwischen den Grundbegriffen eines mathematischen Gebietes, aus denen sich dann das ganze Gebiet auf rein logischem Wege deduzieren läßt. Die Fragen nach der Vollständigkeit, der Unabhängigkeit und vor allem auch der Widerspruchslosigkeit der Axiome sind ein wesentlicher Bestandteil der Axiomatik (HILBERT) (2). Für Anschauung scheint da auf den ersten Blick kein Platz. Und doch hat die Axiomatik eine Läuterung der Anschauung im Gefolge. Denn zunächst gewährt uns die kristallklare Einfachheit des logischen Gefüges einer durchgeführten axiomatischen Theorie einen ästhetischen Genuß. Und weiter ist diese schlierenfreie Klarheit für unser geistiges Auge von einer kaum zu überbietenden Anschaulichkeit. Endlich tritt im Gefolge der Axiomatik, beginnend, wie mir scheint, mit E. SCHMIDTS klassischer Dissertation, das Bestreben auf, bei jeder mathematischen Beweisführung nach den letzten Gründen zu forschen, sich nicht mit einem irgendwie durchgeführten Beweis zu begnügen, sondern die zu erstrebende Allgemeinheit der Voraussetzungen so abzuwägen, daß die inneren Gründe am besten zur Wirkung kommen. Was man Reinheit der Methoden nennt, findet in solcher axiomatischen Anlage der Beweisführung und der Darstellung seinen klarsten Ausdruck.

Wenn weiter eine junge Generation heute gerne die analytische Geometrie oder die Differentialgeometrie auf vektorieller Grundlage aufbaut, so ist die Vorliebe für ein solches Vorgehen auch eine Folge der Axiomatik, deren Anforderungen an präzise Begriffsbildung und systematischen Aufbau sich auf diesem Wege am besten mit dem Bestreben paaren, geometrische Theorie und geometrische Anschauung möglichst eng versöhnt und eng verbunden nebeneinander zu sehen. STEINITZ' grund-

legende Körperarbeit und die daran anschließende moderne algebraische Methode verdanken ihre Anziehungskraft neben ihrer mathematischen Stärke doch auch dem Umstand, daß hier eine grandiose logische Einfachheit und innere Anschaulichkeit das Bedürfnis eines jeden Mathematikers befriedigen, während eine sinnliche Anschauung uns nur reizen, aber nicht sättigen kann.

Endlich weist HILBERTS Metamathematik, die den axiomatischen Aufbau der klassischen Mathematik schließt, den beiden Erkenntnisquellen Anschauung und Denken ihren gerechten Anteil an den Gründen mathematischer Gewißheit zu. Auch so wieder bewährt sich die Axiomatik als eine logische Sichtung der anschaulichen Belange. Auch die intuitionistische Mathematik BROUWERS weist sowohl der Anschauung wie dem Denken einen Anteil an den Gründen der mathematischen Gewißheit zu. Man kann so tatsächlich in dem Ausgleich zwischen Anschauung und Denken ein Charakteristikum unserer dritten Epoche sehen.

HILBERT beschreibt die Stellung der Axiomatik zu Anschauung und Denken 1900 in seinem Vortrag wie folgt: „Zudem ist es ein Irrtum zu glauben, daß die Strenge in der Beweisführung die Feindin der Einfachheit wäre. An zahlreichen Beispielen finden wir im Gegenteil bestätigt, daß die strenge Methode zugleich auch die einfachere und leichter faßliche ist. Das Streben nach Strenge zwingt uns eben zur Auffindung einfacherer Schlußweisen; auch bahnt es uns häufig den Weg zu Methoden, die entwicklungsfähiger sind, als die alten Methoden von geringerer Strenge." Und etwas weiter. „Die arithmetischen Zeichen sind geschriebene Figuren und die geometrischen Figuren sind gezeichnete Formeln und kein Mathematiker könnte diese gezeichneten Formeln entbehren, so wenig wie ihm beim Rechnen etwa das Formieren und Auflösen der Klammern oder die Verwendung anderer analytischer Zeichen entbehrlich sind. Die Anwendung der geometrischen Zeichen als strenge Beweismittel setzt die genaue Kenntnis und völlige Beherrschung der Axiome voraus, die jenen Figuren zugrunde liegen, und damit diese geometrischen Figuren dem allgemeinen Schatze mathematischer Zeichen einverleibt werden dürfen, ist daher eine strenge axiomatische Untersuchung ihres anschauungsmäßigen Inhaltes notwendig. Wie man beim Addieren zweier Zahlen die Ziffern nicht unrichtig untereinander setzen darf, sondern vielmehr erst die Rechnungsregeln, d. h. die Axiome der Arithmetik das richtige Operieren mit den Ziffern bestimmen, so wird das Operieren mit den geometrischen Zeichen durch die Axiome der geometrischen Begriffe und deren Verknüpfungen bestimmt."

Es ist eine ideale Harmonie von Anschauung und Denken, die hier propagiert wird. Was HILBERT 1900 fordert, erhebt zum wissenschaftlichen Prinzip, was mancher vorher schon fühlte. Was hier verlangt wird, ist heute Allgemeingut. Geläutert, gereift und gestärkt geht die Anschauung aus der axiomatischen Kur hervor[1]. Fühlbar freilich wird dies alles erst dem, der sich mit willigem Verständnis in die modernen mathematischen Gedankengänge vertieft.

Es ist ja auch eine tiefe Wandlung, die die ersten 30 Jahre unseres Jahrhunderts für die Mathematik bedeuten. Man ermißt sie z. B., wenn man ein durchschnittliches Lehrbuch aus dem Anfang des Jahrhunderts heute auf sich wirken läßt oder mit einem heutigen Lehrbuch vergleicht. Denn stets wird in den Lehrbüchern und dem allgemeinen Unterricht der Universitäten das erscheinen, in dem das Zeitbewußtsein das Fundament der gleichzeitigen Forschung sieht.

Die Tiefe der Wandlung und namentlich den Anteil HILBERTS an ihr ermißt man aber auch, wenn man sich die Neuartigkeit der Gedankengänge vergegenwärtigt, die 1890 HILBERTS berühmte Arbeit über die algebraischen Formen beherrschen (HILBERT) (3). Es ist dies wohl das erste Beispiel, wo Gedankengänge, die an der gerade aufkommenden allgemeinen Mengenlehre und den abstrakten Begriffsbildungen DEDEKINDS orientiert sind, ein tiefes altes Problem erfolgreich zur Lösung bringen.

Nachhaltig hat ferner HILBERTS erste Leistung in den Grundlagenfragen — die Grundlagen der Geometrie von 1899 — das mathematische Denken der folgenden 30 Jahre beeinflußt. Wenn man heute oft das konkrete Einzelproblem zugunsten allgemeiner begrifflicher Untersuchungen im Hintergrunde sieht, so ist das weniger eine Nachwirkung der WEIERSTRASSschen Schule, als ein Beweis für die Fruchtbarkeit der Richtung, die von DEDEKIND und CANTOR begründet, in HILBERT ihren Propheten gefunden hat. Dem Beispiel dieser Männer folgen nun schon einige Generationen von Mathematikern. Schon das starke Interesse an Grundlagenfragen, d. i. die Systematik der Wissenschaft kennzeichnet unser Zeitalter.

Auch der Pariser Vortrag von 1900 hebt denn mit Grundlagenfragen an.

Problem 1 gilt der alten CANTORschen Vermutung, daß eine jede unendliche Teilmenge des Kontinuums entweder abzählbar ist, oder selbst die Mächtigkeit des Kontinuums besitzt. Ferner wird hier der Beweis des Wohlordnungssatzes als Problem gestellt. Beide Sätze sind so eng mit einer Stellungnahme zu den allgemeinen Fragen einer Grundlegung der Mengenlehre verknüpft, daß nur im Rahmen eines eingehenden Berichtes über diese Grundlagenfragen im allgemeinen von dem gegenwärtigen Stand der beiden Einzelfragen gehandelt werden könnte. Das gilt sowohl von ZERMELOS Beweis des Wohlordnungssatzes (ZERMELO) (1) wie von HILBERTS Bemühungen um das Konti-

[1] Daß diese Kur der naiven Anschauung zum Heile gereiche, will nicht jeder wahrhaben. Herr G. SCHEFFERS sieht in der Läuterung nichts als Tod und Unterdrückung. (Vgl. Allerhand aus der zeichnerischen Geometrie. Mitt. d. preuß. Hauptstelle f. d. naturwiss. Unterricht **1930**, H. 11, S. 10.)

nuumproblem. Das gilt auch von der Frage nach der Widerspruchsfreiheit der Axiome der Arithmetik, der das *Problem 2* gilt, eine Frage, die ja nur für den Axiomatiker in Betracht kommt.

Nimmt man einmal an, daß die Axiome der Arithmetik widerspruchsfrei sind, so sind auch die Axiome der Geometrie frei von Widersprüchen. Nimmt man das an, so ergeben sich doch immer noch eine ganze Reihe von Problemen. HILBERTS *Problem 3* ist ein solches. Es handelt von der Lehre vom Rauminhalt. Es wird damit eine Einzelfrage aufgegriffen, die bereits GAUSS berührt hat. Sie bekommt aber erst im Rahmen einer geometrischen Axiomatik einen hinreichend präzisen Sinn, um ihre Behandlung zu ermöglichen. In der Ebene läßt sich die Lehre vom Flächeninhalt der Polygone, ohne Heranziehung der Stetigkeitsaxiome, durch bloßes Zerlegen passender Figuren in kongruente Dreiecke aufbauen. HILBERT vermutet, daß im Raume eine analoge Theorie unmöglich ist. In der Tat hat M. DEHN (1) auf HILBERTS Anregung hin zwei Tetraeder mit gleicher Grundfläche und Höhe angegeben, die weder zerlegungsgleich noch ergänzungsgleich sind. Dieselben können also weder in kongruente Tetraeder zerlegt, noch durch Zufügung kongruenter Tetraeder zu Polyedern ergänzt werden, die sich selber in kongruente Tetraeder zerlegen lassen. Somit läßt sich die Lehre vom Rauminhalt nicht auf die Kongruenz zurückführen. Es müssen andere Hilfsmittel, wie z. B. das CAVALIERische Prinzip, herangezogen werden. In der Tat hat W. SÜSS (1) einen derartigen Aufbau der Lehre vom Rauminhalt durchführen können. Er hat damit diese Frage der Elementarmathematik zum Abschluß gebracht.

Problem 4 gilt gleichfalls der geometrischen Axiomatik. Es handelt sich um die Aufstellung aller Geometrien, in denen die Gerade die kürzeste ist. D. i. also die Frage nach denjenigen metrischen Geometrien, deren Geodätische mit den Punkten durch die Axiome der Anordnung und Verknüpfung der euklidischen Geometrie verbunden sind. Diese Anregung hat bisher nur Herrn HAMEL (1, 2) und Herrn FUNK (1) Gelegenheit zu schönen Erfolgen gegeben. Mir scheint aber, daß mit diesen Arbeiten das letzte Wort in dieser Frage noch nicht gesprochen ist. Denn es sind doch noch eine ganze Reihe von Fragen unerledigt geblieben. Ich hebe insbesondere die von HAMEL gemachte Differenzierbarkeitsannahme hervor, deren Stellung innerhalb der Axiomatik der Klärung bedarf. Sie hat zur Folge, daß das Problem sich an die Variationsrechnung anschließen läßt. Dies ist auch für FUNK der Ausgangspunkt. Vom Standpunkt einer geometrischen Axiomatik ist das unbefriedigend, so sehr es auch in die moderne Differentialgeometrie passen mag. Man kann wohl annehmen, daß der heutige Stand der mengentheoretischen Geometrie hier ein Weiterkommen erlauben würde. Von da aus gesehen scheint hier noch ein reizvolles Problem zu liegen.

Problem 5 handelt von LIES Begriff der kontinuierlichen Transformationsgruppen ohne die Annahme der Differenzierbarkeit der die Gruppe definierenden Funktionen. HILBERT ist wohl auf diese Frage zunächst durch den Zusammenhang mit den Grundlagen der Geometrie geführt worden. Man kann nämlich die Bewegungsgruppen der euklidischen und der nichteuklidischen Geometrien durch gewisse Axiome charakterisieren und so im Sinne von HELMHOLTZ und von LIE einen Aufbau der betreffenden Geometrien leisten. Dabei sind dann Bewegungen zunächst umkehrbar eindeutige und stetige Abbildungen, die gewisse axiomatisch geforderte Eigenschaften besitzen, und es zeigt sich, daß die Bewegungen durch solche Forderungen charakterisiert werden können. LIE hat aber zu seiner Theorie die Differenzierbarkeit der die Bewegungen darstellenden Abbildungen nötig. Der geometrische Sinn gerade dieser Differenzierbarkeit ist aber schlecht zu fassen. Daher die Frage, ob man nicht solche Differenzierbarkeitsannahmen überhaupt entbehren kann. In der Tat hat HILBERT (4) bald danach für den Fall der ebenen euklidischen und hyperbolischen Geometrie zum Ziele gelangen können. R. L. MOORE (1) und W. Süss (2) haben diese Überlegungen weitergeführt. Weiter hat R. G. LUBBEN (1) den Fall der zweidimensionalen sphärischen Geometrie erledigt. Der Fall der elliptischen Ebene ist noch unerledigt. W. Süss (3) ist es gelungen, die entsprechende Theorie auch für die räumliche euklidische Geometrie zu entwickeln. Zum gleichen Ziele ist auch B. VON KERÉKJÁRTÓ (2) für die euklidische und die hyperbolische Geometrie des dreidimensionalen Raumes gelangt. Das entsprechende Problem für beliebige LIEsche ein- und zweidimensionale Gruppen hat vorher schon L. E. J. BROUWER (2, 3) erledigt. B. VON KERÉKJÁRTÓ (1) hat seine Ergebnisse bestätigt. Es zeigte sich, daß in der Tat auch ohne Differenzierbarkeitsannahmen neue Gruppen nicht auftreten. Die Erledigung des Problems für mehr als zwei Dimensionen steht noch aus. Vielleicht verdienen in diesem Zusammenhang auch die Arbeiten von J. SCHUR (Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss. 1924) und J. v. NEUMANN (Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss. 1927) über die Darstellung kontinuierlicher Gruppen durch lineare Transformationen Erwähnung.

Die Elemente der LIEschen Gruppen hängen von gewissen Parametern ab. Die Gruppeneigenschaft drückt sich durch Funktionalgleichungen für die Transformationen als Funktionen dieser Parameter aus. Diese sollen ohne Differenzierbarkeitsannahmen studiert werden. Dies veranlaßt HILBERT weiter, für das große Gebiet der Funktionalgleichungen überhaupt gleichfalls den Verzicht auf Differenzierbarkeitsannahmen als Problem zu stellen. Soweit ich sehe, ist diese Frage in der Zwischenzeit nicht gefördert worden, wenn man nicht gerade an die Theorie der Integralgleichungen denken will.

Problem 6 gilt der mathematischen Behandlung der Axiome der Physik. Hier ist zunächst zu be-

merken, daß Axiome in der Form von Postulaten oder Hauptsätzen schon von jeher in der Physik eine besondere Rolle spielen. Axiome, das sind, um mit CARATHÉODORY (1) zu reden, „Verallgemeinerungen von Erfahrungstatsachen, die unter besonders einfachen Umständen beobachtet wurden". Aber erst die von 1905 an entstehende EINSTEINsche Relativitätstheorie bildet ein grandioses Beispiel einer axiomatisch durchgeführten physikalischen Theorie. Aber darüber hinaus ist noch etwas anderes für die geometrische Axiomatik charakteristisch. Es ist der von aller Prüfung an der Außenwelt unabhängige Aufbau der Theorie, die Vollständigkeit und Widerspruchslosigkeit der Axiome. Das gerade aber interessiert den Physiker nicht allein. Denn für ihn ist der Appell an die Erfahrung doch immer entscheidender als der an die Logik. So beschränkt auch HILBERT 1900 seine Forderung eigentlich auf einige zu einem gewissen Abschluß gediehene Gebiete der Physik. In erster Linie hebt er die Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Mechanik hervor. In der Tat hat auch VON MISES (1) — ohne Bezugnahme auf HILBERT — im Jahre 1919 einen axiomatischen Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung gegeben. Diese grundlegende Arbeit hat in diesen 11 Jahren die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung tief und wirksam beeinflußt. Doch ist hier nicht der Ort, das im einzelnen zu verfolgen. Arbeiten von DÖRGE (1), von v. MISES und TORNIER (1, 2, 3), die an den MISESschen Ansatz anknüpfen, führen jede in ihrer Weise die Axiomatik der Wahrscheinlichkeitsrechnung weiter. Die mathematische Erfassung der Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung nimmt heute den Rang nächst denen der Geometrie ein.

Für den axiomatischen Aufbau der klassischen Mechanik hat HAMEL die Hauptverdienste. Er hat erst kürzlich wieder den Stand der Frage zusammenfassend geschildert (HAMEL) (3). Es zeigt sich, daß auch hier noch recht viele anregende Fragen zu erörtern bleiben, bis die Theorie den Stand der Grundlagen der Geometrie erreicht hat. Weiter haben z. B. die spezielle Relativitätstheorie[1] durch CARATHÉODORY (2), die Thermodynamik durch CARATHÉODORY (1), die elementare Strahlungstheorie durch HILBERT (5, 6, 7) eine im engeren mathematischen Sinn axiomatische Behandlung gefunden. Aber nirgends ist die Vollendung der geometrischen Axiomatik erreicht, auch nicht in den HILBERTschen Arbeiten über Grundlagen der Physik (HILBERT) (8, 9, 10) oder den Untersuchungen von HILBERT, NORDHEIM, J. VON NEUMANN über die Axiome der Quantentheorie.

HILBERTS *Problem 7* von der Irrationalität und Transzendenz gewisser Zahlen hat nach drei Jahrzehnten in allerjüngster Zeit wesentliche Fortschritte gefunden. Dem HILBERTschen Vortrag voraus gingen neben den bekannten Sätzen von HERMITE und LINDEMANN über e und π mancherlei Untersuchungen über arithmetische Eigenschaften analytischer Funktionen. Die auf die BESSELschen und die hypergeometrischen Funktionen bezüglichen Untersuchungen von HURWITZ z. B. gaben STRIDSBERG (1) und G. FABER (1) den Ausgangspunkt für ihre Irrationalitätsuntersuchungen. Aus diesen Arbeiten geht z. B. hervor, daß die BESSELsche Funktion $J_0(x)$ für jeden von Null verschiedenen rationalen Wert von x^2 irrational ist. W. MAIER (1) hat sogar zeigen können, daß dann $J_0(x)$ auch keine quadratische Irrationalzahl ist. HILBERT nennt in seinem Vortrag die BESSELschen Funktionen nicht besonders. Aber sie sind es, bei denen es kürzlich C. L. SIEGEL (1) zum ersten Male seit HERMITE und LINDEMANN gelungen ist, zu beweisen, daß gewisse Zahlen transzendent sind, d. h. keiner algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten genügen. Aus SIEGELS allgemeinen Sätzen geht hervor, daß $J_0(x)$ für von Null verschiedenes algebraisches x stets transzendent ist. Insbesondere sind also die Nullstellen von $J_0(x)$ transzendent. HILBERT fragt in seinem Vortrag besonders nach $e^{\pi} = i^{-2i}$ und allgemeiner nach den Zahlen α^{β}, wo α algebraisch und β algebraisch irrational ist. Im Gebiete dieser Zahlen hat jüngst A. GELFOND[1] einen schönen Erfolg erzielt. Er konnte nicht nur zeigen, daß e^{π} transzendent ist, es gelang ihm auch der Nachweis für die Zahlen α^{β}, wenn $\beta = i\sqrt{p}$ und p eine ganze positive rationale Zahl ist. Das noch allgemeinere HILBERTsche Problem über $e^{i\pi z}$, das bei rationalem z algebraisch, für alle irrationalen algebraischen z vermutlich transzendent ausfällt, harrt noch seines Meisters.

Problem 8 unterstreicht die Wichtigkeit einer weiteren Beschäftigung mit dem weiten Gebiet der Primzahlprobleme. Es würde den Rahmen dieses Vortrages sprengen, wenn in ihm ein Bericht über den gegenwärtigen Stand der weitverzweigten Primzahlforschung Platz finden sollte. Dazu ist auch um so weniger Veranlassung, als Problem 8 nur auf Fragestellungen hinweist, die auch unabhängig von HILBERT in Fluß waren, da doch HADAMARDS berühmte Arbeit den für die Folge grundlegenden ersten Fortschritt über RIEMANN gebracht hatte.

Nur einige wenige Bemerkungen mögen Platz finden. Die eine bezieht sich auf das GOLDBACHsche Problem, ob jede gerade Zahl die Summe zweier Primzahlen sei. Es ist interessant, daß HILBERT damals schon die Möglichkeit ins Auge faßt, dies anscheinend so abliegende Problem mit den Ansätzen RIEMANNS in Zusammenhang zu bringen. Tatsächlich haben HARDY und LITTLEWOOD (1) diese HILBERTsche Vermutung bestätigt. Sie haben unter der Voraussetzung, daß die RIEMANNsche Vermutung über die Lage der Nullstellen der Zetafunktion und ihr Analogon für

[1] H. REICHENBACHS Axiomatik der speziellen Relativitätstheorie gehört nur scheinbar hierher, da sie rein philosophische Absichten verfolgt.

[1] Dies HILBERTsche Problem ist so im Bewußtsein aller Mathematiker absorbiert worden, daß sich GELFOND gar nicht mehr auf HILBERT bezieht.

die DEDEKINDschen Zetafunktionen (und damit nach SUETUNA, Math. Z. **32**, für alle L-Funktionen) zutrifft, bewiesen, daß jede genügend große ungerade Zahl die Summe von drei ungeraden Primzahlen ist. Das ist zwar nicht die GOLDBACHsche Vermutung, aber doch ein ihr nahe stehendes Ergebnis[1].

Aussichtsvoller erschien HILBERT damals schon die Übertragung der für die rationalen Primzahlen gewonnenen Ergebnisse auf die Verteilung der Primideale in einem algebraischen Zahlkörper. Hier sind namentlich durch LANDAU (1, 2, 3) und im Anschluß an HECKES bahnbrechende Entdeckung der Funktionalgleichung der DEDEKINDschen Zetafunktion, die Untersuchungen in Fluß gekommen (HECKE) (1, 2, 3) und zu im wesentlichen gleichen Stand gebracht, wie bei den rationalen Primzahlen.

Problem 9 gilt dem Beweis des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes für beliebige algebraische Zahlkörper. In Fortführung der HILBERTschen Arbeiten haben diese Aufgabe zunächst FURTWÄNGLER (1) und TAKAGI (2) für Potenzreste mit Primzahlexponenten gelöst. H. HASSE (3, 4) hat dann auf Grund des Reziprozitätsgesetzes von ARTIN (2) den Beweis für beliebige Exponenten durchgeführt. Damit ist die ursprüngliche HILBERTsche Fragestellung in aller nur wünschenswerten Vollständigkeit und Allgemeinheit gelöst. Darüber hinaus hat HASSE zum Teil gemeinsam mit ARTIN seit einigen Jahren begonnen, explizite Formeln zum Reziprozitätsgesetz zu entwickeln, d. h. den sog. Umkehrfaktor $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1}$ des Potenzrestsymbols als explizite Funktion der algebraischen Zahlen α und β darzustellen. Diese Untersuchungen sind noch in Fluß. HASSE (5) hat erst kürzlich ausführlich über den gegenwärtigen Stand der ganzen Theorie berichtet und insbesondere auf noch offene Fragen hingewiesen. Es verdient hervorgehoben zu werden, daß die Lösung des Problems 9 in engem Zusammenhang mit der gleichfalls von HILBERT angeregten Entwicklung steht, welche die Theorie der Klassenkörper in diesen 30 Jahren genommen hat.

Das *Problem 10* bezieht sich auf die Entscheidung der Lösbarkeit einer beliebigen Diophantischen Gleichung. Insbesondere verlangt HILBERT die „Angabe eines Verfahrens, nach welchem sich vermittels einer endlichen Anzahl von Operationen entscheiden läßt, ob die Gleichung in ganzen rationalen Zahlen lösbar ist". Ich weiß nicht, ob die verschiedenen hier in Betracht kommenden Bearbeiter sich bewußt waren, zur Lösung eines HILBERTschen Problemes beizutragen. Immerhin hat HILBERT hier eine Frage gestellt, die in diesen 30 Jahren zu vielen tiefgreifenden Untersuchungen über die Approximation algebraischer Zahlen durch andere algebraische Zahlen Anlaß gab. Schon 1908 zielt der Satz von THUE auf einen Spezialfall hin. Bekanntlich lautet ja der Satz von THUE so: Ist $f(x, y)$ eine homogene binäre Form mit rationalen Koeffizienten, aber nicht Potenz einer linearen Form, oder einer indefiniten quadratischen Form, so hat die Diophantische Gleichung $f(x, y) = a$ für jedes rationale a nur endlich viele ganzzahlige Lösungen. In seiner Dissertation hat C. L. SIEGEL (2) den THUEschen Satz auf algebraische Zahlkörper übertragen. 1929 hat C. L. SIEGEL folgenden überraschend einfachen Satz bewiesen: $f(x, y)$ sei eine ganze rationale Funktion mit Koeffizienten aus einem algebraischen Zahlkörper. Dafür, daß die Gleichung $f(x, y) = 0$ unendlich viele ganzartige[1] Lösungen in einem algebraischen Zahlkörper besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß die zugehörige RIEMANNsche Fläche das Geschlecht Null besitzt und höchstens zwei Unendlichkeitsstellen der Funktion $|x|+|y$ enthält. SIEGEL hat weiter die Möglichkeit geboten, Schranken für die Anzahl der Lösungen im Falle eines von Null verschiedenen Geschlechtes zu bestimmen. Es fehlt aber noch eine Abschätzung der x, y selbst. Wäre diese geleistet — wie das im Falle gewisser kubischer Formen aus den Untersuchungen von DELAUNAY und NAGELL sich ergibt[2] —, so wäre das HILBERTsche Problem im binären Falle gelöst. Im Falle des Geschlechtes Null wird man noch eine Methode zur Auffindung aller Lösungen wünschen. Eine solche haben schon 1890 HILBERT und HURWITZ (1) gefunden, wofern die Koeffizienten rational sind, und die Lösungen im Körper der rationalen Zahlen liegen sollen. SIEGELS Arbeit bietet für beliebige Zahlkörper die Lösung der entsprechenden Frage.

Das *Problem 11* stellt die Aufgabe, die Theorie der quadratischen Formen mit beliebig vielen Variablen und mit Koeffizienten aus einem beliebigen algebraischen Zahlkörper in Angriff zu nehmen. Hier sind A. SPEISER (1), C. L. SIEGEL (3) und H. HASSE (1) erfolgreich gewesen. HASSE hat die Theorie, soweit bei Darstellung und Transformation beliebige Nenner zugelassen werden, zu völligem Abschluß gebracht. Die Verallgemeinerung der MINKOWSKISCHEN Untersuchungen, bei denen diese Nenner eingeschränkt sind oder ganz fehlen sollen, auf den algebraischen Fall steht noch aus; dürfte aber nach Ansicht von HASSE an Hand des vorhandenen Materials ohne prinzipielle Schwierigkeiten durchführbar sein.

Problem 12 verlangt die Ausdehnung des KRONECKERschen Satzes über ABELsche Körper auf einen beliebigen algebraischen Rationalitätsbereich. Dahin gehört zunächst der sog. KRONECKERsche Jugendtraum, d. i. die Frage, ob alle

[1] Neuerdings hat freilich SCHNIRELMANN auf elementarem hypothesenfreiem Wege gezeigt, daß eine feste Zahl k existiert derart, daß man jede positive ganze Zahl > 1 als Summe von höchstens k Primzahlen darstellen kann.

[1] Ganzartig heißt eine algebraische Zahl, die durch Multiplikation mit einer natürlichen Zahl in eine ganze algebraische Zahl übergeführt werden kann.

[2] Man vgl. NAGELL (1), wo über den Stand der Frage zusammenfassend berichtet wird.

relativ zu einem imaginär-quadratischen Grundkörper ABELschen Körper durch Einheitswurzeln und Werte der elliptischen Modulfunktion $j(\omega)$ für ω-Werte aus dem Grundkörper erzeugt werden können. FUETER (1) und TAKAGI (1) haben bewiesen, daß man außerdem noch gewisse Teilwerte von elliptischen Funktionen heranziehen muß. HASSE [vgl. (5)] hat anstatt dieser mit den unsymmetrischen elliptischen Funktionen 2. Stufe durchgeführten Ansätze, eine Theorie auf der 1. Stufe entwickelt, und insbesondere in Hinsicht auf die HILBERTsche Frage gezeigt, daß man alle über einem imaginär quadratischen Grundkörper ABELschen Körper erhält, wenn man in der Modulfunktion $j(\omega) = j(\omega_1, \omega_2)$ und der elliptischen Funktion $\wp(u, \omega_1\, \omega_2)$, die aus der WEIERSTRASSschen p-Funktion durch Normierung gewonnen ist, für ω_1, ω_2 alle linear unabhängigen Zahlenpaare des Grundkörpers und für u alle Zahlen des Grundkörpers einsetzt. HILBERT verlangt aber weiter analoge Untersuchungen bei beliebiger Wahl des Grundkörpers. Diese Frage hat HECKE (1, 2) für reell-quadratische Grundkörper in Angriff genommen. Von der Lösung der allgemeinen Frage scheint man aber noch weit entfernt zu sein. Merken wir daher an, was HILBERT selber über die Bedeutung dieser Frage sagt: „Ich halte dies Problem für eines der tiefgehendsten und weittragendsten Probleme der Zahlen- und Funktionentheorie." „Ich bin sicher, daß insbesondere die Theorie der analytischen Funktionen von mehreren Variablen eine wesentliche Bereicherung erfahren würde, wenn es gelänge, diejenigen Funktionen aufzufinden und zu diskutieren, die für einen beliebigen algebraischen Zahlkörper die entsprechende Rolle spielen, wie die Exponentialfunktion für den Körper der rationalen Zahlen und die elliptische Modulfunktion für den imaginären quadratischen Zahlkörper."

Problem 13 macht seiner Nummer Ehre. Es steht am unglücklichsten von allen 23 Problemen da. Außer einer Arbeit von HILBERT (7) selbst über die Gleichung neunten Grades und einer Arbeit von OSTROWSKI (1) liegen noch keine Beiträge zu den Problemstellungen vor, die es anschneidet. Es ist überschrieben „Unmöglichkeit der Lösung der allgemeinen Gleichung siebenten Grades mittels Funktionen von nur 2 Argumenten". Setzt man z. B. in eine Funktion $f(u, v)$ von 2 Argumenten $u = F(x, y)$, $v = G(y, z)$, so erhält man eine Funktion von 3 Argumenten x, y, z. Setzt man in $f(u, v)$ zunächst $u = F(x, y)$, $v = G(z, t)$, dann $x = g(r, s)$, $y = h(r, s)$, $z = i(r, s)$ ein, so erhält man wieder eine Funktion von 3 Argumenten r, s, t, durch Ineinanderschiebung von Funktionen von nur 2 Argumenten erzeugt. Bei den Verfahrungsweisen der Nomographie beruht oft das Prinzip der Darstellung auf solchen Ineinanderschiebungen. Auch manche Fragen aus der Theorie der geometrischen Konstruktionen gehören hierher. Nun kann man sich leicht überzeugen, daß man jede Funktion von 3 Argumenten durch Ineinanderschachtelung von Funktionen von 2 Argumenten darstellen kann, wenn man auch unstetige Funktionen in den Kreis der Betrachtung zieht. Das Problem hebt erst an, wenn man nur stetige oder nur analytische oder nur algebraische Funktionen zuläßt. Man kann relativ leicht zeigen, daß man nicht jede analytische Funktion von 3 Variablen durch Ineinanderschachtelung von analytischen Funktionen von nur 2 Variablen darstellen kann[1]. Auch die weitere naheliegende Frage. ob man jede stetige Funktion von 3 Variablen durch Ineinanderschachtelung von stetigen Funktionen von 2 Variablen darstellen kann, ist leicht zu erledigen. Aber es ist unbekannt, ob man jede algebraische Funktion von 3 Variablen durch Ineinanderschiebung von Funktionen (sei es stetigen, analytischen oder algebraischen) von nur 2 Variablen darstellen könne. Die Auflösung der allgemeinen Gleichung siebenten Grades würde nach HILBERTS Vermutung ein hierhergehöriges Beispiel der Unmöglichkeit bieten.

Die schon erwähnte Arbeit HILBERTS über die Gleichung neunten Grades (an die in etwas anderer Fragestellung auch WIMAN angeknüpft hat) enthält den Nachweis, daß die allgemeine Gleichung neunten Grades zu ihrer Auflösung nur algebraische Funktionen von 4 Argumenten verlangt. Man kommt mit algebraischen Funktionen eines Argumentes und 2 speziellen algebraischen Funktionen von 4 Variablen aus. In dieser Arbeit stellt HILBERT weiter die Frage, ob es algebraische Funktionen von 2 Variablen gibt, die sich nicht durch analytische Funktionen von einer Variablen und die bloße Verwendung der Summe darstellen lassen. Eine schon ältere Arbeit von OSTROWSKI (4) zeigt, daß sich

$$\zeta(s, x) = x + \frac{x^2}{2^s} + \frac{x^3}{3^s} + \dots$$

nicht darstellen läßt, durch analytische Funktionen eines Argumentes und durch algebraische Funktionen von beliebig vielen Argumenten. Unterwegs hat auch OSTROWSKI eine von HILBERT unter der Hand geäußerte Vermutung bestätigt, daß nämlich die eben genannte Funktion keiner algebraischen Differentialgleichung genügt. Zu der Frage nach analytischen Funktionen, die keiner algebraischen Differentialgleichung genügen, ist auch von Interesse die Feststellung SCHOTTKYS (1), daß unter den analytischen Funktionen, die Kegelschnittpolygone auf die Kreisfläche abbilden, solche vorkommen, die keiner algebraischen Differentialgleichung genügen. Ferner sind hier neben einer weiteren Arbeit von OSTROWSKI (3) die zahlreichen tiefgründigen Arbeiten des Herrn RITT von Interesse, die zum Teil verwandte Fragen behandeln, indem sie die ältere LIOUVILLEsche Theorie der elementaren Funktionen fortsetzen.

[1] Ich nehme an, daß die nicht ganz präzise Ausdrucksweise HILBERTS am Schluß seiner Problemstellung gerade diesen Sachverhalt meint.

Problem 14 betrifft den Nachweis der Endlichkeit gewisser voller Funktionensysteme, zielt also auf eine Verallgemeinerung der Sätze aus der Invariantentheorie, die am Anfang von HILBERTS Ruhm stehen. Bisher haben einige Arbeiten von E. NOETHER (1, 2, 3) und A. OSTROWSKI (1, 2) nur in einigen Spezialfällen das sehr weit gefaßte Problem in Angriff genommen. HILBERT (11) weist wieder mit Nachdruck auf ein konkretes Problem aus diesem Fragenkreis hin.

Die in *Problem 15* geforderte strenge Begründung von SCHUBERTS Abzählungskalkül ist kürzlich VAN DER WAERDEN (1) gelungen. Es handelt sich hierbei um die Bestimmung der Anzahl der Lösungen einer geometrischen Aufgabe, also des Grades der Gleichung, die sich aus gewissen Eliminationen ergibt. Der Grundgedanke ist der, diese Bestimmung in einem leicht übersehbaren Spezialfall der Aufgabe wirklich vorzunehmen, und von da auf die Allgemeingültigkeit der gefundenen Anzahlen zu schließen. Um z. B. festzustellen, daß zwei Kurven zweiten Grades stets vier Schnittpunkte besitzen, denkt man sich beide Kurven in Geradenpaare ausgeartet, wo dann die Zahl 4 einleuchtet. Um aber von da wirklich auf die Allgemeingültigkeit zu schließen, muß man sich erst darüber klar werden, wie dazu die Multiplizitäten der Lösungen zu definieren sind. Denn es können ja sehr wohl z. B. alle Schnittpunkte (auch schon bei den Geradenpaaren) an eine Stelle zusammenrücken. VAN DER WAERDEN ist nun von topologischen Begriffsbildungen aus zu des Rätsels Lösung gelangt. Zwar gehört die Topologie selbst neben einigen anderen zu den Gebieten, die sich unabhängig von HILBERTS Problemvortrag entwickelt haben. Man sieht aber gerade am Beispiel des Problems 15, wie tief die HILBERTschen Fragen eingreifen. Es hat des Aufbaues einer ganzen Disziplin bedurft, um dies Problem zu lösen.

Problem 16 stellt direkt eine topologische Aufgabe über algebraische Kurven und Flächen. Wie lange bekannt ist, kann z. B. eine Kurve 6. Ordnung nicht mehr als 11 getrennte Züge besitzen. Ist 11 wirklich die Maximalzahl und ist jede an sich denkbare gegenseitige Lage bei der Maximalzahl möglich? Erst ROHN ist nach jahrelangen Bemühungen hier zu Ergebnissen gelangt, die HILBERTS Vermutungen bestätigen. Danach ist die Maximalzahl 11 und können nicht alle Züge auseinander liegen. HILBERT selbst hatte sich von der Richtigkeit seiner Vermutung durch recht umständliche Überlegungen überzeugt und noch weitere Angaben gemacht, die auch ROHN nur auf unpublizierbarem Wege hat bestätigen können. Nahe damit zusammen hängt die Frage nach der Maximalzahl und gegenseitigen Lage der Mäntel einer algebraischen Fläche vierter Ordnung. Auch hier gelangte ROHN 1911 zu dem Ergebnis, daß 11 die Maximalzahl ist (ROHN) (1, 2, 3). Die im gleichen Abschnitt von HILBERT gestellte Frage nach der Maximalzahl der sog. Grenzzykel, die unter den Lösungen algebraischer Differentialgleichungen auftreten können, hat bisher überhaupt noch keine Bearbeitung gefunden. HILBERT (11) stellt neuerdings das weitere Problem topologisch interessante Gebilde algebraisch zu realisieren.

Problem 17 verlangt die Darstellung definiter Formen durch Quadrate. Eine rationale Funktion heißt definit, wenn sie für reelle Werte der Variablen nie negative Werte annimmt. Läßt sich jede solche definite Funktion als Summe von Quadraten rationaler Funktionen darstellen und kann man die Koeffizienten der darstellenden Funktionen aus dem gleichen Körper nehmen, wie die der gegebenen? Das ist Problem 17. Seine Lösung ist dank der großen Fortschritte, die die Körpertheorie mit STEINITZ beginnend gemacht hat, 1926 E. ARTIN (1) gelungen, nachdem viel früher HILBERT (13, 14) und LANDAU (4, 5, 6) einige Sonderfälle erledigt hatten.

Problem 18 handelt von dem Aufbau des Raumes aus kongruenten Polyedern. Es ist aus den Erfahrungen der Krystallographie erwachsen. SCHOENFLIES und andere hatten die endlich vielen möglichen Krystallformen aufgezählt. Darin steckte der mathematische Satz, daß es für die Ebene und den dreidimensionalen Euklidischen Raum nur endlich viele Bewegungsgruppen mit endlichem Fundamentalbereich gibt. Dabei gelten isomorphe oder, was dasselbe bedeutet, im Sinne der affinen Transformationen ähnliche Gruppen als gleich. Die eine von HILBERT gestellte Frage gilt der Sicherung des entsprechenden Satzes für *euklidische* Räume von beliebig vielen Dimensionen. Diesen Satz hat BIEBERBACH (1, 2, 3) 1910 bewiesen. FROBENIUS (1) hat eine Vereinfachung seines Beweises gegeben. Jeder Fundamentalbereich einer Gruppe kann zu einer Zerlegung des Raumes in kongruente Polyeder dienen. Dabei können die verschiedenen Bereiche der Zerlegung durch die Operationen der Gruppe auseinander hervorgehen, oder sie können unter Umständen auch unregelmäßig gelagert sein. Man kennt aber z. B. in der Ebene keine Zerlegung in kongruente Bereiche, bei der die Bereiche nicht die Gestalt von Fundamentalbereichen hätten. Ist das tatsächlich so, und gilt es für alle euklidischen Räume? So lautet die weitere Frage HILBERTS. K. REINHARDT (1) hat in der Tat zeigen können, daß für drei und mehr Dimensionen nicht alle Zerlegungsbereiche Fundamentalbereiche sind. Für die Ebene hat K. REINHARDT (2, 3) die Frage gefördert und hat einen Weg gefunden, der in endlich vielen Schritten zur Entscheidung führt.

Problem 19 fragt, ob die Lösungen regulärer Variationsprobleme, d. h.

$$\iint F(p, q, z, x, y)\, dx\, dy = \min$$

mit

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\frac{\partial^2 F}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial p\, \partial q}\right)^2 > 0$$

stets analytisch sind. F ist dabei als analytisch angenommen.

Durch Arbeiten von LÜTKEMEYER, HOLMGREN, S. BERNSTEIN, GERVEY ist dies für zweidimensio-

nale stetig differenzierbare Lösungen tatsächlich bewiesen (vgl. die Zitate in der Encycl. d. math. Wiss. II, 3, 2, S. 1320ff.). Für Minimalflächen hat kürzlich RADÓ (2) einen recht elementaren Beweis gegeben.

Begnügt man sich mit der Voraussetzung einmaliger Differenzierbarkeit der Lösungen, so hat A. HAAR (2) wenigstens für die Minimalflächen den Beweis erbringen können.

Problem 20 lautet „Allgemeines Randwertproblem". Hier denkt HILBERT 1900 noch nicht an die wenige Jahre später einsetzende Entwicklung der Theorie der Integralgleichungen (FREDHOLM, HILBERT, E. SCHMIDT), durch die dann den Randwertaufgaben ein mächtiges Hilfsmittel erwachsen ist. Er hebt vielmehr als Beispiele lauter Fragen hervor, die sich dieser Theorie nicht unmittelbar unterordnen wie z. B. das PLATEAUsche Problem in der Theorie der Minimalflächen, und ein entsprechendes Problem für Flächen konstanter positiver Krümmung. Er erhofft von einer Ausdehnung der von ihm selbst beim DIRICHLETschen Integral eingeführten Methoden hier Fortschritte. Die sog. direkten Methoden, auf die HILBERT hier anspielt, sind inzwischen durch CARATHÉODORY und vor allem TONELLI im Falle des ebenen gewöhnlichen Variationsproblems ausgebaut worden.

Weniger weit ist man bei den zweidimensionalen regulären Variationsproblemen gediehen, die HILBERT hier in erster Linie im Auge hat. Das PLATEAUsche Problem hat zuerst S. BERNSTEIN in speziellen Fällen gefördert. Dann hat sich H. MÜNTZ ihm zugewandt. Mit Hilfe der direkten Methoden der Variationsrechnung hat A. HAAR (1) das Problem für spezielle Randkurven gelöst. Endlich hat T. RADÓ (1) nach einem ersten Vorstoß von GARNIER und verschiedenen Anläufen von DOUGLAS das PLATEAUsche Problem für beliebige Randkurven gelöst. Freilich bleibt dabei die Minimaleigenschaft unerörtert, und werden zunächst nur die Minimalflächenstücke vom topologischen Typus des Kreises erfaßt. Die Methode von A. HAAR (1) gilt auch für reguläre Variationsprobleme vom Typus

$$\iint F\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Kürzlich hat A. HAAR (2) zusammenfassend über den Stand der Untersuchungen berichtet.

Schließlich muß noch hervorgehoben werden, daß die Arbeiten, welche die von HILBERT beim DIRICHLETschen Prinzip verwendeten Methoden näher studieren, oder verallgemeinern, oder auf verwandte Probleme übertragen, sehr zahlreich sind. LEBESGUE, FUBINI, COURANT verdienen da vielleicht in erster Linie Erwähnung.

Problem 21 verlangt den Beweis der Existenz linearer Differentialgleichungen mit vorgeschriebener Monodromiegruppe. HILBERT (12) selbst hat dasselbe in seiner dritten Mitteilung über Integralgleichungen für eine einzelne lineare Differentialgleichung gelöst. Verschiedene Autoren haben es dann in allgemeineren Fällen und mit anderen Methoden behandelt. PLEMELJ, BIRKHOFF und LAPPO-DANILEVSKI (1) hebe ich besonders hervor.

Problem 22, das die Fragen der Uniformisierung erwähnt, ist ebenfalls auf fruchtbaren Boden gefallen. Jeder kennt die umfangreichen erfolgreichen Arbeiten KOEBES — um nur einen, und zwar den wichtigsten Namen zu nennen — über die Uniformisierung der Kurven. Aber die von HILBERT auch erwähnte Uniformisierung der Flächen spottet noch immer jeder Bemühung. Ob dies Problem aus dem Rahmen der heutigen Mathematik herausfällt, ob eine Weiterentwicklung der Theorie der Körper und allgemeinerer Funktionenbereiche Licht in diese Frage bringen wird?

Problem 23. Weiterführung der Methoden der Variationsrechnung. HILBERT gibt dazu in seinem Vortrag selbst ein Beispiel durch die Darlegung seiner Theorie des unabhängigen Integrals. Von der Entwicklung der direkten Methoden der Variationsrechnung, die an HILBERTS Arbeit über das DIRICHLETsche Prinzip anknüpfte, war schon die Rede. Aber auch davon abgesehen, ist in diesen 30 Jahren das Interesse der Forschung an der Entwicklung der Variationsrechnung sehr rege gewesen. Im einzelnen davon zu berichten, würde den Rahmen dieses Vortrages sprengen.

HILBERTS 23 Probleme sind an unserem Auge vorübergezogen. Keines, das nicht irgendwie vorangekommen wäre. Viele sind endgültig gelöst, die meisten rühren an die Keime neuer mathematischer Theorien, die umgestaltend und richtunggebend die Mathematik beeinflußt haben. Es sind durchweg Probleme, die die begriffliche Erkenntnis fördern. Wenn diese Probleme auch im ganzen den Zeitgenossen einen recht ungewohnten Eindruck machen mochten, so haben doch nun 2 Generationen nach ihrem Vorbild ihre Arbeiten geformt. Gewiß sind nicht alle Probleme von HILBERT erfunden. Einige hat er vorgefunden, andere betonen den Schritt der Zeit. Bei einigen auch haben HILBERTS eigene Arbeiten tiefer gewirkt als die Fragestellung des Vortrages. Manches mathematische Gebiet, wie Funktionentheorie, Topologie, Differentialgeometrie, hat sich wohl stofflich unabhängig von HILBERT entwickelt. Aber auch diese erscheinen deutlich beeinflußt von dem starken Impuls, den HILBERTS Axiomatik und der Geist und die Art seiner Probleme der Mathematik gegeben hat.

Literatur: E. ARTIN, 1. Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate. Abh. a. d. math. Sem. d. Hamburger Univ. **5**, 100—115 (1926) — 2. Beweis des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes. Abh. a. d. math. Sem. d. Hamburger Univ. **5**, 353—363 (1927). — L. BIEBERBACH, 1. Über die Bewegungsgruppen des n-dimensionalen Euklidischen Raumes mit einem endlichen Fundamentalbereich. Gött. Nachr. **1910**, 75—84 — 2. Über die Bewegungsgruppen der Euklidischen Räume. I. Math. Ann. **70**, 297—336 (1911) — 3. Über die Bewegungsgruppen der Euklidischen Räume. II. Math. Ann. **72**, 400—412 (1912). — L. E. J. BROUWER, 1. Zur Analysis situs. Math. Ann. **68**, 422—434 (1910) — 2. Die Theorie der endlichen

kontinuierlichen Gruppen unabhängig von den Axiomen von LIE. I. Math. Ann. **67**, 246–267 (1909); **69**, 180 (1910) — 3. Die Theorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen unabhängig von den Axiomen von LIE. II. Ann. Math. **69**, 181–203 (1910). — C. CARATHÉODORY, 1. Untersuchungen über die Grundlagen der Thermodynamik. Math. Ann. **67**, 355–386 (1909) — 2. Zur Axiomatik der speziellen Relativitätstheorie. Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss., Physik.-math. Kl. **1924**, 12–27. — M. DEHN, 1. Über den Rauminhalt. Math. Ann. **55**, 465–478 (1901). — K. DÖRGE, 1. Zu der von R. VON MISES gegebenen Begründung der Wahrscheinlichkeitsberechnung. L. Math. Z. **32**, 232–258 (1930). — G. FABER, 1. Über arithmetische Eigenschaften gewisser ganzer Funktionen. Sitzgsber. bayer. Akad. Wiss., Math.-physik. Kl. **1913**, 519–556. — G. FROBENIUS, 1. Über die unzerlegbaren diskreten Bewegungsgruppen. Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss., Physik.-math. Kl. **1911**, 654–665. — R. FUETER, 1. ABELsche Gleichungen in quadratisch-imaginären Zahlkörpern. Math. Ann. **75**, 177–255 (1914). — P. FUNK, 1. Über Geometrien, bei denen die Geraden die kürzesten sind. Math. Ann. **101**, 226–237 (1929). — PH. FURTWÄNGLER, 1. Die Reziprozitätsgesetze für Potenzreste und Primzahlexponenten in allgebraischen Zahlkörpern. I. II. III. Math. Ann. **67**, 1–31 (1909); **72**, 346–386 (1912); **74**, 413–429 (1913). — A. GELFOND, Sur les nombres transcendants. C. r. Acad. Sci. Paris **189**, 1224–1226 (1929). — G. HAMEL, 1. Über die Geometrien, in denen die Geraden die kürzesten sind. Diss. Göttingen 1901 — 2. Über die Geometrien, in denen die Geraden die kürzesten sind. Math. Ann. **57**, 231–264 (1903) — 3. Die Axiome der Mechanik. Handbuch der Physik **5**, 1–41 (o. J.). — A. HAAR, 1. Über das Plateausche Problem. Math. Ann. **97**, 124 bis 158 (1926) — 2. Zur Variationsberechnung. Hamb. Abh. **8**, 1–27 (1930). — H. HASSE, 1. Darstellbarkeit von Zahlen durch quadratische Formen in einem beliebigen algebraischen Zahlkörper. Crelles J. **153**, 113–130 (1923) — 2. Äquivalenz quadratischer Formen in einem beliebigen algebraischen Zahlkörper. Crelles J. **153**, 158–162 (1923) — 3. Über das Reziprozitätsgesetz der m-ten Potenzreste. Crelles J. **158**, 228–259 (1927) — 4. Neue Begründung und Verallgemeinerung der Theorie des Normenrestsymbols. Crelles J. **162**, 134–144 (1930) — 5. Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper. I. Jber. dtsch. Math. Vereinigg **35**, 1–55 (1926); Ia. Jber. dtsch. Math. Vereinigg **36**, 233–311 (1927); II. Jber. dtsch. Math. Vereinigg, Erg.-Bd. **6** (1930). — E. HECKE, 1. Über die Zetafunktion beliebiger algebraischer Zahlkörper. Gött. Nachr. **1917**, 77–89 — 2. Über die L-Funktionen und den Dirichletschen Primzahlsatz in einem beliebigen Zahlkörper. Gött. Nachr. **1917**, 299–318 — 3. Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen. Math. Z. **1**, 357–376 (1918); **6**, 11–51 (1920) — 4. Höhere Modulfunktionen und ihre Anwendungen auf die Zahlentheorie. Math. Ann. **71**, 1 bis 37 (1911) — 5. Über die Konstruktion relativ Abelscher Zahlkörper durch Modulfunktionen von zwei Variablen. Math. Ann. **74**, 465–510 (1913). — D. HILBERT, 1. Mathematische Probleme. Gött. Nachr. **1900** — 2. Axiomatisches Denken. Math. Ann. **78**, 405–415 (1918) — 3. Über die Theorie der algebraischen Formen. Math. Ann. **36**, 473–534 (1890) — 4. Über die Grundlagen der Geometrie. Math. Ann. **56**, 381–422 (1901) (auch abgedruckt in Grundlagen der Geometrie, 3. u. folgende Aufl. Leipzig 1909) — 5. Begründung der elementaren Strahlungstheorie. Gött. Nachr. **1912**, 773–789. — 6. Bemerkungen zur Begründung der elementaren Strahlungstheorie. Gött. Nachr. **1913**, 409–416 — 7. Zur Begründung der elementaren Strahlungstheorie. Gött. Nachr. **1914**, 274–298 — 8. Die Grundlagen der Physik. I. Gött. Nachr. **1915**, 394–407 — 9. Die Grundlagen der Physik. II. Gött. Nachr. **1917**, 53–76. — 10. Die Grundlagen der Physik. Math. Ann. **92**, 1–32 (1924) — 11. Über die Gleichung neunten Grades. Math. Ann. **97**, 243–250 (1926) — 12. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. III. Gött. Nachr. **1905**, 307–339 — 13. Über ternäre definite Formen. Acta math. **17**, 169–197 (1893) — 14. Grundlagen der Geometrie. Festschrift zur Feier der Enthüllung des GAUSS-WEBER-Denkmals in Göttingen, S. 82–85. Leipzig 1899 — D. HILBERT u. A. HURWITZ, Über die Diophantischen Gleichungen vom Geschlechte Null. Acta math. **14**, 217–224 (1890). — B. v. KERÉKJÁRTÓ, 1. On a geometrical theory of continuous groups. I. Ann. of Math. **27**, 105–117 (1925) — 2. On a geometrical theory of continuous groups. II. Ann. of Math. **29**, 169–179 (1928). — E. LANDAU, 1. Neuer Beweis des Primzahlsatzes und des Primidealsatzes. Math. Ann. **56**, 645–670 (1903). — 2. Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale. Leipzig 1918. 2. Aufl. 1927. — 3. Über Ideale und Primideale in Idealklassen. Math. Z. **2**, 52–154 (1918) — 4. Über die Darstellung definiter binärer Formen durch Quadrate. Math. Ann. **57**, 53–64 (1903) — 5. Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate. Arch. Math. u. Physik (3) **7**, 271 bis 277 (1904) — 6. Über die Darstellung definiter Funktionen durch Quadrate. Math. Ann. **62**, 272–285 (1906). — J. A. LAPPO-DANILEVSKI, Resolution algorithmique des problèmes réguliers de Poincaré et de Riemann. J. de la Soc. phys.-math. de Léningrade **1928 II**, 94–154. — R. G. LUBBEN, The double elliptic case of the Lie-Riemann-Helmholtz-Hilbert-Problem of the foundations of geometry. Fundamenta math. **11**, 35–95 (1928). — W. MAIER, 1. Potenzreihen irrationalen Grenzwertes. Crelles J. **156**, 93–148 (1927). — R. VON MISES, 1. Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Math. Z. **5**, 52–99 (1919) — 2. Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit. Wien 1928. — R. L. MOORE, 1. On the LIE-RIEMANN-HELMHOLTZ-HILBERT-Problem of the foundations of Geometry. Amer. J. of Math. **41**, 299–319 (1919). — T. NAGELL, 1. Zur Theorie der kubischen Irrationalitäten. Acta math. **55**, 33–65 (1930). — J. VON NEUMANN, 1. Eine Axiomatisierung der Mengenlehre. Crelles J. **154**, 219 bis 240 (1925). — E. NOETHER, 1. Körper und Systeme rationaler Funktionen. Math. Ann. **76**, 161–196 (1915) — 2. Der Endlichkeitssatz der Invarianten endlicher linearer Gruppen der Charakteristik p. Gött. Nachr. **1926**, 28–35 — 3. Über Maximalbereiche aus ganzzahligen Funktionen. Moskauer Recneil **36**, 65–72 (1929). — A. OSTROWSKI, 1. Über die Existenz einer endlichen Basis bei gewissen Funktionensystemen. Math. Ann. **78**, 94–119 (1918) — 2. Über die Existenz einer endlichen Basis bei Systemen von Potenzprodukten. Math. Ann. **81**, 21, 24 (1920) — 3. Über die Reihe $\sum_0^\infty q^{n^2}x^n$. Math. Ann. **82**, 64–67 (1920) — 4. Über DIRICHLETsche Reihen und algebraische Differentialgleichungen. Math. Z. **8**, 241–298 (1920). — T. RADÓ, 1. On PLATEAUS Problem. Ann. of Math. **31**, 457–469 (1930) — 2. Über den analytischen Charakter der Minimalflächen. Math. Z. **24**, 321–327 (1925). — K. REINHARDT, 1. Zur Zerlegung der Euklidischen Räume in kongruente Polytope. Sitzgsber.

preuß. Akad. Wiss., Physik.-math. Kl. **1928**, 150—155. — 2. Über die Zerlegung der Euklidischen Ebene in kongruente Bereiche. Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss., Physik.-math. Kl. **1928**, 26—46 — 3. Über die Zerlegung der Ebene in Polygone. Diss. Frankfurt a. M. 1918. — K. ROHN, 1. Die Maximalzahl von Ovalen bei einer Fläche vierter Ordnung. Ber. ü. d. Verh. d. sächs. Ges. d. Wiss. **63**, 423—440 (1911) — 2. Die ebene Kurve sechster Ordnung mit elf Ovalen. Ber. ü. d. Ver. d. sächs. Ges. d. Wiss. **63**, 515—533 (1911). — 3. Die Maximalzahl und Anordnung der Ovale bei der ebenen Kurve 6. Ordnung und bei der Fläche 4. Ordnung. Math. Ann. **73**, 177—229 (1913). — F. SCHOTTKY, 1. Zur Frage: Haben die Klassenfunktionen Differentialgleichungen? Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss., Physik.-math. Kl. **1922**, 414—423. — C. L. SIEGEL, 1. Über einige Anwendungen Diophantischer Approximationen. Abh. preuß. Akad. Wiss., Physik.-math. Kl. **1929**, 3—70 — 2. Approximation algebraischer Zahlen. Math. Z. **10**, 173—213 (1921) — 3. Darstellung total positiver Zahlen durch Quadrate. Math. Z. **11**, 246—275 (1921). — E. STRIDSBERG, 1. Sur quelques propriétés arithmétiques de certaines fonctions transcendantes. Acta math. **33**, 233—292 (1909). — A. SPEISER, Die Theorie der binären quadratischen Formen mit Koeffizienten und Unbestimmten in einem beliebigen Zahlkörper. Diss. Göttingen 1909. — W. SÜSS, 1. Begründung der Lehre vom Polyederinhalt. Math. Ann. **82**, 297—305 (1921) — 2. Beiträge zur gruppentheoretischen Begründung der Geometrie. Toh. Math. J. **26**, 365—385 (1926) — 3. Beiträge zur gruppentheoretischen Begründung der Geometrie. IV. Topologische Kennzeichnung der räumlichen Elementargeometrie. Jap. J. of Math. **4**, 103—119 (1927). — T. TAKAGI, 1. Über eine Theorie des relativ ABELschen Zahlkörpers. J. of the college of Sci. Impr. Univ. of Tokyo **41** (1920) — 2. Über das Reziprozitätsgesetz in einem beliebigen algebraischen Zahlkörper. J. of the college of Sci. of the Impr. Univ. of Tokyo **44**, (1922). — A. THUE, Om en generel i store hele tal uløsbar ligning. Vid. selskab Skrifter Oslo **1908**. — E. TORNIER, 1. Wahrscheinlichkeitsrechnung und Zahlentheorie. Crelles J. **160** 177 bis 198 (1929) — 2. Eine neue Grundlegung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Z. Physik **63**, 697—705 (1930) — 3. Die Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Crelles J. **163**, 45—64 (1930). — B. L. VAN DER WAERDEN, Topologische Begründung des Kalküls der abzählenden Geometrie. Math. Ann. **102**, 337—362 (1929). — E. ZERMELO, 1. Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann. Math. Ann. **59**, 514—516 (1904) — 2. Neuer Beweis für die Möglichkeit der Wohlordnung. Math. Ann. **65**, 107—128 (1907).

Zuschriften.

Der Herausgeber bittet, 1. im Manuskript der *Zuschriften* oder in einem Begleitschreiben die Notwendigkeit einer raschen Veröffentlichung an dieser Stelle zu *begründen*, 2. die Mitteilungen auf einen Umfang von *höchstens* einer Druckspalte zu beschränken. Bei längeren Mitteilungen muß der Verfasser mit Ablehnung oder mit Veröffentlichung nach längerer Zeit rechnen.

Für die Zuschriften hält sich der Herausgeber nicht für verantwortlich.

Zur experimentellen Tektonik.

In H. 34 dieses Jahrgangs hat in einer Abhandlung „Zur experimentellen Tektonik" H. CLOOS interessante Versuche mit feuchtem Tonschlamm beschrieben und gibt die Bedingungen, die der Physiker an ein geologisches Experiment stellt, folgendermaßen an: „Mein Versuchsstoff genügt den Anforderungen, die der Physiker an ein geologisches Experiment stellen muß: er verkleinert die Materialeigenschaften im Maßstabe des Modells; seine Festigkeit ist ebensoviel kleiner als diejenige der Gesteine, wie das Modell kleiner ist als das Gebirge." — Es haben O. MORATH und der Verfasser (1913) gezeigt, in welchem Verhältnis die verschiedenen physikalischen Eigenschaften, z. B. Zugfestigkeit, Biegungsfestigkeit, Druckfestigkeit und die Zeitdauer der Versuche, was auch wesentlich ist, geändert werden müssen. Das Verhältnis der Festigkeit in Natur und Modell ist durch die Längendimensionen, aber auch durch die Dichte der Modellsubstanz bestimmt; es ist also ein anderes als das der Dimensionsverkleinerung. Die betreffenden Beziehungen sind nicht einfach linear [vgl. diese Zeitschr. **11**, 570 (1924)]. Es dürfte im allgemeinen nicht möglich sein, die erwähnten Eigenschaften alle im richtigen Verhältnis zu verkleinern. Man muß vielmehr einen Kompromiß treffen; man wird z. B. Elastizitäts- und Torsionsmodul fast unberücksichtigt lassen und vor allem Zug-, Druck-, Biegungsfestigkeit angenähert richtig wiederzugeben suchen.

Durch die Arbeit von H. CLOOS sind jetzt nach längerer Pause (W. PAULCKE 1912, J. KOENIGSBERGER und O. MORATH 1913) geotektonische Versuche wieder aufgenommen worden, obwohl seither einige bedeutende Geologen die Bedeutung derartiger Experimente und, was dasselbe ist, die Bedeutung geophysikalischer Rechnungen für geologische Naturvorgänge bestritten haben, allerdings ohne anzugeben, wo ihrer Ansicht nach Fehler zu verbessern sind. Bei dieser Ablehnung von Modellversuchen war wohl der Gedanke entscheidend, daß dadurch Schlüsse wankend gemacht werden könnten, die man aus Naturbeobachtungen ziehen zu müssen glaubte.

In diesem Zusammenhang sei *ein* derartiger Fall starken Widerspruchs zwischen Modellverhalten und geologischen Anschauungen hervorgehoben:

Die Modellversuche haben, bisher wenigstens, die Möglichkeit zusammenhängender liegender Falten verneint, soweit deren Längsausdehnung *erheblich* (mehr als 2—3mal) größer wäre als deren Mächtigkeit. Man beobachtet nämlich im Experiment beim Vorwärtswandern eines Schichtpakets an dessen Stirnfläche nur Stauchungen, die zu kurzen Umfaltungen werden, von denen jeweils Stücke abreißen und so unten liegenbleiben. Am Schluß des Versuches sieht das Ergebnis so aus, wie wenn eine lange liegende Falte sich vorwärtsgeschoben habe, deren untere Lage ausgequetscht wurde. Die Beobachtung während des Versuchs zeigt aber, wie erwähnt, daß diese Ansicht nicht zutrifft. — An die Alpengeologen sei deshalb die Frage gestellt, ob man irgendwo bei großen sog. Faltenüberschiebungen einen zusammenhängenden unteren Faltenschenkel gefunden hat. — Liegende umgekippte Falten, deren Längsdimensionen nicht viel größer sind als die Querdimensionen, also z. B. liegende Falten, wie sie im Simplongebiet beobachtet wurden, sind dagegen experimentell möglich. Auch können frühere Faltungen als Ganzes durch Schub verfrachtet werden, kleinere Faltungen beim Schub entstehen. Doch die Annahme großer liegender Faltendecken widerspricht m. E. sowohl dem Experiment wie einer einfachen Rechnung auf Grund der gemessenen Zugfestigkeit der Gesteine.

Freiburg i. Br., den 30. Oktober 1930.

J. KOENIGSBERGER.

Bemerkung zur Streuung harter γ-Strahlen.

In einer Zuschrift von G. Beck unter demselben Titel [Naturwissenschaften **18**, 896 (1930)] wird die Intensität der Kernstreuung von harten γ-Strahlen abgeschätzt. Dabei glaubt der Verfasser zeigen zu können, daß dieselbe bei schweren Kernen einen wesentlichen Teil der Gesamtstreuung darstellen kann. Wie eine etwas nähere Betrachtung zeigt, beruht aber dieses Resultat auf einer irrtümlichen Annahme über Matrixelemente der betrachteten γ-Übergänge. Aus der Vertauschungsrelation folgt nämlich, daß immer die Beziehung:

$$\sum \frac{2\, m\omega\, |r|^2}{\hbar} = 1$$

exakt erfüllt werden muß (m — Masse des strahlenden Teilchens, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$), wo ω und r die Frequenz ($2\pi\nu$) und das Matrixelement des Überganges darstellen und die Summe über alle möglichen Übergänge zum Normalzustand erstreckt wird. Setzt man darin die Beckschen Ansätze $\hbar\omega = 3 \cdot 10^{-6}$ erg, $r = 10^{-12}$ cm ein, so wird aber die linke Seite gleich 40. Somit ist eine starke Herabsetzung der mit dem Quadrat von $|r|^2$ gehenden Streuungsintensitäten notwendig, was eine Streuung ergeben würde, die mindestens 10000mal kleiner als die Comptonsche ist.

Kopenhagen, Institut for Teoretisk Fysik, den 10. November 1930. L. Landau.

Bergmannserien im Argonspektrum.

In den Spektren der Edelgase sind Bergmannserien nur im Xenonspektrum[1] bekannt. Durch die Entdeckung dieser Serien wurde festgestellt, daß die „X"- und „Y"-Termen in Wirklichkeit f-Termen waren.

[1] W. F. Meggers, T. L. de Bruin, C. J. Humphreys, B. of S. J. of Res. **3**, 731 (1929).

Tabelle 1.

Grenzen $\begin{cases} 3\,d_6 = 15443{,}5 & 3\,d_5 = 14972{,}0 \\ 3\,d_5 = 15293{,}4 & 3\,d_4' = 14360{,}7 \end{cases}$ $3\,d_4 = 14090{,}2$

m		4	5	6	7	8	9	10
$3\,d_6\,X$	λ	—	G 9073,32	G 8079,73	M 7579,73	—	—	—
	ν	—	11018,3	12373,3	13189,45	—	—	—
	$m\,X$	—	4425,2	3070,2	2254,1	—	—	—
$3\,d_5\,X$	λ	—	G 9198,58	G 8178,91	M 7666,99	M 7368,08	M 7176,34	G 7042,77
	ν	—	10868,3	12223,2	13039,3	13568,3	13930,8	14195,1
	$m\,X$	—	4425,1	3070,3	2254,1	1725,1	1362,6	1098,3
$3\,d_3\,X$	λ	—	R 9477,6	R 8399,4	G 7860,48	—	—	—
	ν	—	10548,3	11901,5	12718,4	—	—	—
	$m\,X$	—	4423,7	3070,5	2253,6	—	—	—
$m\,X$		6922,91	4425,09	3070,31	2254,16	1725,03	1362,6	1098,3
n^*		3,9813	4,9798	5,9784	6,9772	7,9758	8,9701	9,9912
$3\,d_6\,Y$	λ	—	G 9180,07	G 8171,99	R 7661,85	—	—	—
	ν	—	10890,2	12233,6	13048,1	—	—	—
	$m\,Y$	—	4403,2	3059,8	2245,3	—	—	—
$3\,d_5\,Y$	λ	—	G 9459,64	G 8392,27	M 7855,70	G 7543,96	M 7343,51	—
	ν	—	10568,33	11912,4	12726,11	13252,0	13613,7	—
	$m\,Y$	—	4403,7	3059,6	2245,9	1720,0	1358,3	—
$m\,Y$		6881,55	4403,25	3059,85	2246,15	1719,90	1358,49	—
n^*		3,9933	4,9921	5,9886	6,9896	7,9877	8,9876	—
$3\,d_4'\,U$	λ	—	R 10049,8	M 8849,44	G 8255,11	G 7910,43	M 7690,09	—
	ν	—	9947,7	11296,9	12110,4	12638,1	13000,2	—
	$m\,U$	—	4413,0	3063,8	2250,3	1722,6	1360,5	—
$3\,d_4\,U$	λ	—	R 10331,3	G 9066,79	R 8443,5	R 8083,1	R 7853,17	—
	ν	—	9675,7	11026,2	11840,2	12368,2	12730,2	—
	$m\,U$	—	4414,5	3064,0	2250,0	1722,0	1360,0	—
$m\,U$		—	4413,7	3063,9	2250,1	1722,3	1360,2	—
n^*		—	4,9862	5,9846	6 9835	7,9820	8,9820	—
$3\,d_4'\,W$	λ	—	R 10027,5	G 8840,27	R 8249,7	G 7907,59	—	—
	ν	—	9969,9	11308,8	12118,3	12642,6	—	—
	$m\,W$	—	4390,8	3051,9	2242,4	1718,1	—	—
$3\,d_4\,W$	λ	—	R 10307,0	G 9057,29	R 8437,9	—	—	—
	ν	—	9699,5	11037,8	11848,2	—	—	—
	$m\,W$	—	4390,7	3052,4	2242,0	—	—	—
$m\,W$		—	4390,7	3052,2	2242,2	1718,1	—	—
n^*		—	4,9993	5,9961	6,9958	7,9919	—	—
$3\,d_3\,Z$	λ	R 10506,9	G 8332,25	R 7491,88	—	—	—	—
	ν	9515,0	11998,3	13344,1	—	—	—	—
	$m\,Z$	5457,0	2973,7	1627,9	—	—	—	—
$m\,Z$		5456,96	2974,22	1628,26	—	—	—	—
$m\,Z + A$		6880,26	4397,42	3051,40	—	—	—	—
n^*		3,9937	4,9956	5,9966	—	—	—	—

Entsprechende Serien sind nun auch im Argonspektrum aufgefunden. Das Argonspektrum wurde mit einem Plangitterspektrographen (Disp. 17 Å/mm) auf Neocyaninplatten photographiert. Die Aufnahmen wurden in 20 Stunden exponiert mit einer Argonröhre, die bis 2 mm Druck gefüllt wurde und mit 50 mA getrieben wurde.

Die gefundenen Serien sind in Tab. 1 zusammengestellt.

Neu bestimmt sind dadurch die Grenzterme: $3\,d_6$, $3\,d_5$, $3\,d_3$, $3\,d'_4$, $3\,d_4$ und die Termfolgen mU und mW. Solche Linien, die bereits von MEISSNER[1] oder GREMMER[2] beobachtet sind, sind mit M resp. G bezeichnet. Eigene Linien sind mit R bezeichnet. Für die Termwerte mX, mY und mZ sind die von MEISSNER gefundenen Werte mit ihren Quantenzahlen angeführt.

Außerdem sind einige neue Kombinationen der Haupt- und Nebenserien gefunden (Tab. 2) und dadurch folgende Termen berechnet: $2\,s_2$, $2\,s_3$, $2\,s_4$, $2\,s_5$ und $3\,s''$.

Tabelle 2.

I	λ	ν	Komb.	Bemerkung
3	R 10685,6	9355,8	$2\,p_1 - 2\,s_2$	$2\,s_2 = 12138{,}4$
5	R 10677,3	9363,1	$2\,p_{10} - 2\,s_2$	$2\,s_2 = 13646{,}3$
5	R 10478,2	9541,0	$2\,p_{10} - 2\,s_3$	$2\,s_3 = 13468{,}4$
8	R 10470,0	9548,4	$1\,s_2 - 2\,p_{10}$	vber. = 9548,38 (M)
1	R 10251,2	9752,3	$2\,p_9 - 3\,s''$	$3\,s'' = 12896{,}4$
2	R 10066,9	9930,8	$2\,p_1 - 4\,d_2$	vber. = 9928,76 (M)
10	M 9192,61	10759,43	$2\,p_{10} - 2\,s_2$	$2\,s_2 = 12248{,}94$
10	M 9194,60	10872,96	$2\,p_{10} - 2\,s_3$	$2\,s_3 = 12136{,}4$
2	R 8994,6	11114,7	$2\,p_{10} - 2\,s''$	$3\,s'' = 12894{,}7$
1	R 8988,6	11122,2	$2\,p_1 - 4\,d_2$	vber. = 11125,1 (M)

Die Wellenlängen > 10000 Å sind vorläufig nur durch Extrapolation gemessen.

Kopenhagen, Institut für theoretische Physik der Universität, den 15. November 1930.

EBBE RASMUSSEN.

Über eine limnologische Bedeutung der freien Kohlensäure.

Bei der Bearbeitung des mir übergebenen Materials der deutschen limnologischen Sunda-Expedition nach Sumatra, Java und Bali (im Druck) fand ich die Grundzüge bestätigt, welche ich 1918 (Arch. Naturgesch. Jg. 84, Abt. A, S. 183ff.) auf Grund von Fängen in Deutschland für das Vorkommen von Peridineen im Süßwasser umriß. Mir kam dabei der Gedanke, daß möglicherweise der Gehalt des Wassers an freier Kohlensäure für die Entwicklung dieser Organismen entscheidend sei, was auch mit den Erfahrungen an meinen Reinkulturen übereinstimmen würde. Ich stelle daher folgendes fest:

Die Seen des oligotrophen Typus pflegen arm an Peridineen zu sein. Die Kohlensäurespannung bewegt sich hier [nach HÖLL, Pflanzenforschung **11** (1928)] in mittleren Grenzen (3—8 mg CO_2 pro Liter), doch zeigen die Seen der Kalkgebirge (chemisch) etwas andere Verhältnisse. Jedenfalls dürfte in diesen Seen stets so viele Kohlensäure vorhanden sein, daß für das Fehlen der Peridineen andere Ursachen verantwortlich zu machen sind als etwa (ausschließlich) ein Mangel an freier Kohlensäure.

Sehr große, tiefe Seen des eutrophen Typus sind aber in der Regel ebenfalls arm an Peridineen, wie ich wieder am Toba-Meer[3] auf Sumatra bestätigt fand. Bei uns kommen meist nur einige wenige Ubiquisten (und zwar in sehr geringer Individuenzahl) vor, wie Peridinium cinctum Ehrbg. (vorwiegend im Sommer) oder Peridinium Willei Huitf.-Kaas (wohl mehr im Winter). Im Toba-Meer kam Ceratium hirundinella (O. F. Müll.) Bergh in einem Falle nicht häufig vor, sonst fand ich nur ganz kleine Formen, und diese auch nur selten (Peridinium Wildemani Wolosz. und Peridinium inconspicuum Lemm.). In solchen Seen ist nun oft lange Zeit hindurch (manchmal fast das ganze Jahr über) überhaupt keine freie Kohlensäure nachweisbar.

Als die besten Peridineengewässer gelten die kleinen flachen Seen des eutrophen Typus. In diesen entwickelt sich aber, wie bekannt, häufig eine „Wasserblüte" von Cyanophyceen, und in diesem Falle sind die Peridineen immer verschwunden. Nach HÖLL sind nun diese Gewässer „charakterisiert durch einen mehr oder weniger hohen Gehalt an gelöstem Kalziumbikarbonat (ca. 50—150 mg CaO_2 pro Liter), welches im Verein mit der hydrolysierten freien Kohlensäure ein natürliches Puffersystem darstellt [$Ca(HCO_3)_2 : H_2CO_3$]". Infolgedessen sind p_H-Schwankungen hier selten, es besteht eine mehr oder weniger stark alkalische Reaktion. Zu Beginn der Produktion von Cyanophyceen haben wir einen CO_2-Gehalt von 6 mg CO_2 pro Liter ($p_H = 7{,}5$). Die Algen assimilieren zunächst die überschüssige („aggressive") Kohlensäure weg. Sodann wird die noch übrige Kohlensäure verbraucht, wobei das p_H etwas steigt. Darauf fällt (als rein chemischer Vorgang) ein Teil des Kalziumbikarbonats aus, und weitere Kohlensäure wird frei. Aber auch diese wird bei weiterer Entwicklung der Algen wegassimiliert; das p_H kann sich jetzt infolge von gelöstem Kalziumbikarbonat und Kalziumkarbonat auf 8,3 erhöhen. Wenn nun auch ein so hohes p_H für viele Peridineen nicht leicht erträglich sein dürfte, so ist es doch sicherlich die nahezu gänzlich fehlende Kohlensäure, welche eine Vegetation von Peridineen so gut wie unmöglich macht.

Hinzuweisen ist nun ferner darauf, daß, teilt man (nach APSTEIN) die Seen ein in „Dinobryonseen" und „Chroococcaceenseen", es immer die letzteren sind, welche arm an Peridineen befunden werden. Es wird kaum möglich sein, an dieser Stelle näher hierauf einzugehen, weil das Problem nach den vorstehenden Angaben zu allgemein gefaßt erscheint.

Die humuspolytrophen Gewässer scheiden hier aus, weil sie eine beträchtliche Kohlensäurespannung zeigen (nach HÖLL meist über 5,0 mg freie CO_2 pro Liter). Bei ihnen wirkt das vorherrschend meist tiefe p_H als auslesender Faktor.

Nachschrift. Bei THIENEMANN (Deutsche Forschung **1930**) findet sich die Kohlensäurekurve für das Toba-Meer auf S. 10. Es wird auch auf S. 9 die entsprechende Kurve gegeben für den Ranoe Lamongan: hier bis zu 5 m Tiefe überhaupt keine Kohlensäure (nach unten zu mehr), entsprechend fanden sich nur zwei winzige Peridineenformen, und diese auch nur in geringer Zahl. Weitere Kurven lagen mir nicht vor; sollte wohl die von mir festgestellte auffallende Monotonie der tropischen Süßwasser-Peridineenflora im Vergleich mit dem Reichtum der Peridineen in warmen Meeren davon herrühren, daß in den Tropen niemals Wintertemperaturen herrschen, daher 1. die Kohlensäure wegschaffende Assimilationstätigkeit des Phytoplanktons in „sommerlicher" Fülle niemals aufhört? und 2. daß hierdurch die schwerere Löslichkeit der Kohlensäure in warmem Wasser um so mehr an Bedeutung gewinnt? Übrigens ist auch die Löslichkeit der Kalksalze und des Eisens wiederum allein durch die vorhandenen Mengen von freier Kohlensäure bedingt.

Rostock, den 15. November 1930.

E. LINDEMANN.

[1] K. W. MEISSNER, Z. Physik **39**, 172 (1926); **40**, 839 (1927).

[2] W. GREMMER, Z. Physik **50**, 716 (1928).

[3] S. die „Nachschrift".

Zur Kondensation der Catechin-Gerbstoffe.

Catechine und Catechingerbstoffe sind durch die Eigenschaft charakterisiert, leicht in schwerlösliche, gefärbte Umwandlungsprodukte, die Gerbstoffrote oder Phlobaphene überzugehen. Derartige Umwandlungen finden unter dem Einfluß von Säuren, aber auch unter anderen Umständen statt, ohne daß bisher Klarheit über den strukturellen Verlauf der Rotbildung vorliegt oder auch nur darüber, ob die unter verschiedenen Umständen erhaltenen höhermolekularen Produkte wesensgleich sind. Eine Klarstellung dieser Verhältnisse ist aus pflanzenphysiologischen wie gerbstofftechnischen Gründen sehr erwünscht.

Wir sind der Meinung, daß die Kondensationslust des Catechins durch seine Struktur als Oxy-dihydropyran bedingt ist, also aus der gleichzeitigen Anwesenheit einer Doppelbindung in 2,3-Stellung eines Pyranringes und eines Hydroxyls in Stellung 5 zu erklären ist. Tetramethyl-catechin, in welchem alle Phenolhydroxyle methyliert sind, ist noch leicht kondensierbar[1]. Diese Eigenschaft ist also nicht durch die Phenolhydroxyle des Catechins bedingt. Aber auch die beiden Benzolringe des Catechins sind nicht conditio sine qua non. Denn auch Glucal, für welches Bergmann und Mitarbeiter[2] die Struktur eines 2-Oxymethyl-3,4-hydroxy-γ-pyran-dihydrid (2,3) bewiesen haben, wird durch Säuren zu hochmolekularen, gefärbten Stoffen kondensiert. Das entsprechende Tetrahydro-pyran, das Dihydroglucal[3] ist dagegen wieder säurebeständig. Die Doppelbindung ist also entscheidend für die Neigung zur Kondensation. Andererseits sind aber auch nicht alle Hydroxyle des Glucals für die Kondensationslust entbehrlich. Denn wenn diese fehlen, wie im Anhydroacetobutylalkohol [2-Methyl-γ-pyran-dihydrid (5,6)], so fehlt auch die ausgesprochene Neigung zur Kondensation durch Säuren.

Damit ist die Ähnlichkeit im Verhalten der Glucale und Catechine gegen Säuren auf definierte Strukturmerkmale, die beiden gemeinsam sind, zurückgeführt. Die Erfahrungen an Glucalen und Desoxyzuckern wird man künftig bei der Erforschung der Kondensation von Gerbstoffen mit Nutzen verwenden können[4].

Dresden, Kaiser Wilhelm-Institut für Lederforschung, den 17. November 1930.

Max Bergmann und Georgi Pojarlieff.

Methylierte Tri- und Tetrasaccharide aus Cellulose und Stärke.

Unlängst konnte das kristallisierte Decamethyl-β-methyl-cellotriosid (Sdp. 216—220°, 0,08 mm) beschrieben werden[1], das aus den Produkten der Acetolyse der Cellulose nach der Methylierung durch Destillation neben dem entsprechenden, 60° tiefer siedenden Cellobiosederivat gewonnen wurde. 50—60° höher als das methylierte Cellotriosid, und zwar bei 265—275° (0,1 mm) siedet die zugehörige Methyltetraose, die jetzt gleichfalls in sehr schönen Kristallen erhalten wurde und alle Eigenschaften eines Tridekamethyl-β-methyl-cellotetraosids besitzt.

Beide Zuckerderivate zeichnen sich durch ein außerordentliches Kristallisationsvermögen in Wasser oder Petroläther aus, auch dann, wenn der Methoxylgehalt noch 1—2% zu tief ist. Erst die wiederholte Methylierung der schon kristallinen Präparate führt zu vollkommen einheitlichen Produkten, die richtige Analysenwerte und die erwarteten Molekulargewichte (in Campfer) ergeben. Auf die Molekulargewichtsbestimmung legen wir, da es sich um Zuckerderivate handelt, nur Gewicht im Zusammenhang mit den charakteristischen Siedepunkten.

Methyliertes Trisaccharid Schmp. 118°;
$[\alpha]_{578}^{18} = -17°$ in Wasser;
Methyliertes Tetrasaccharid Schmp. 139°;
$[\alpha]_{578}^{18} = -14{,}6°$.

Wir behalten uns die weitere Untersuchung vor, insbesondere mit Röntgenstrahlen.

Aus den Abbauprodukten der acetylierten Stärke wurden nach der Methylierung völlig entsprechende Fraktionen vom gleichen Siedepunkt erhalten, die aber nicht zur Kristallisation zu bringen sind.

Methyl. Trisaccharid $[\alpha]_{578}^{18} = +133°$ (Wasser)
MG. 613, ber. 658
Methyl. Tetratrisaccharid $[\alpha]_{578}^{18} = +140°$ (Wasser)
MG. 812, ber. 862.

Es besteht kein Zweifel, daß diese Abbauprodukte der Stärke die α-glucosidischen Analoga der beschriebenen methylierten Oligosaccharide aus Cellulose sind. Allerdings ist im Gegensatz zu den kristallinen Cellulosederivaten anzunehmen, daß das endständige Methoxyl in α- sowie β-Bindung vorliegt.

Aus der Kinetik des hydrolytischen Abbaus konnte unlängst der zwingende Schluß gezogen werden[2], daß die Stärke ebenso wie die Cellulose Kettenstruktur besitzt. Hier ist ein neuer Beweis für diese Auffassung erbracht. Wir betonen erneut, auch gegenüber neueren Einwänden von H. Pringsheim[3], H. Schlubach[4] und anderen, daß für das Inulin dasselbe gefordert werden muß[5]. Denn die Auffassung, es sei aus molekularen Aggregaten durch Molekülkräfte aufgebaut, stützt sich auf dieselben Argumente, die bei der Cellulose und Stärke zusammengebrochen sind[6].

Heidelberg, Chemisches Institut der Universität, den 18. November 1930.

Karl Freudenberg und Karl Friedrich.

---

[1] Unveröffentlichte Untersuchung. Catechin wird, wenn sein Pyranhydroxyl acetyliert wird, nach K. Freudenberg beständiger, vgl. Collegium **1924**, 418.

[2] Letzte Mitteilung M. Bergmann und W. Freudenberg, Ber. dtsch. chem. Ges. **62**, 2783 (1929).

[3] E. Fischer, Ber. dtsch. chem. Ges. **47**, 208 (1914). Die Pyranstruktur des Hydroglucals folgt aus der vorstehend zitierten Arbeit.

[4] In diesem Zusammenhang verdient auch die Kondensationslust des 4-Oxy-4-acetobutylalkohols [vgl. Bergmann, Miekeley und Stather, Ber. dtsch. chem. Ges. **58**, 82 (1924)] und des 2-Oxy-4-aceto-butylalkohols [Hibbert und Timm, J. amer. chem. Soc. **45**, 2433 (1923)] Beachtung. Nach Levene und Walti, J. of biol. Chem. **88**, 771 (1930) und nach eignen unveröffentlichten Beobachtungen tritt bei der Kondensation des letztgenannten Stoffes ein ungesättigter Heterozyklus (Pyran oder Furan) auf, was in guter Übereinstimmung zu unseren oben entwickelten Anschauungen steht.

[1] Ber. dtsch. chem. Ges. **63**, 1961 (1930).

[2] Ber. dtsch. chem. Ges. **63**, 1510 (1930).

[3] Ber. dtsch. chem. Ges. **63**, 2636 (1930).

[4] Ber. dtsch. chem. Ges. **63**, 2302 (1930).

[5] Einen Einwand von H. Staudinger, Ber. dtsch. chem. Ges. **63**, 2323 (1930), verstehe ich dahin, daß er für Inulin zwar auch Ketten, aber weniger lange als in Cellulose und Stärke annimmt. Da Inulin etwa 1000mal rascher zerfällt als Cellulose oder Stärke, trifft dies für die gewöhnlich untersuchten Präparate zu, die fast immer Abbauprodukte sind. Wieweit dies für unverändertes Inulin gilt, scheint mir der besonderen Prüfung zu bedürfen. Freudenberg.

[6] Eine ausführliche Darstellung erscheint demnächst in „Nature".

Mitteilungen aus verschiedenen Gebieten.

Die Verhandlungen der Berliner Anthropologischen Gesellschaft gehen nach einer sehr interessanten Richtung hin. Diese ist vielleicht weniger fachwissenschaftlich als allgemein interessant. Die moderne Anthropologie zeigt, wie prähistorische Funde Verbindungen mit der heute lebenden Menschheit erkennen lassen, und wie andererseits aus den heute lebenden Menschenformen sich Deutungen ungeahnter Art für vorgeschichtliche Überbleibsel des Menschengeschlechts ergeben. Alte Museumsstücke, früher als undeutbares Material, als Reste ausgestorbener Rassen angesehen, gewinnen Leben und stellen sich mitten unter den Lebenden als erkennbar und unvergangen vor unsere Augen. In einem früheren Bericht habe ich schon darauf aufmerksam gemacht, daß aus einem Vortrag über ethnologische und volksgeschichtliche Eigentümlichkeit der zentralamerikanische Indianer gewissermaßen als Nebenergebnis herauszulesen war, daß diese angeblich in der Conquista ausgerotteten Stämme in voller Blüte weiterzubestehen scheinen. Jetzt wurde etwas Gleiches über die Guanchen der Kanarischen Inseln in der Sitzung vom 4. Oktober 1929 von DOMINIK WÖLFEL, Wien, und EUGEN FISCHER, Berlin-Dahlem, vorgetragen. Die Guanchen, das ausgestorbene, angeblich von den einwandernden Europäern völlig vernichtete Volk der Ureinwohner der Kanarischen Inseln, sollte nur noch in Mumien und Knochen erkennbar sein. Aus Sprache, Kultur, reichlichen Körperresten brachte WÖLFEL ein gewaltiges Material zusammen, welches heute noch lebende Reste der Urbevölkerung nachwies. FISCHER, in seiner glänzenden, das Verständnis so sehr erleichternden synthetischen Darstellungsart, zeigte zunächst die Rasse auf, aus welcher die Urbevölkerung bestanden haben mußte und sodann in der jetzt lebenden Bevölkerung deren massenhafte Überbleibsel. Natürlich nicht reinblütige Rasse ist zu erwarten, denn das Menschenvolk aller Länder ist überall, wo verschiedene Völker zueinander kommen und miteinander leben, im höchsten Grade gemischt und bastardiert. Es mendelt auch nie ein reiner Stamm, dem alten gleichend, wieder heraus, aber einzelne Züge gehen niemals verloren. Die Form der alten Kanarier kennen wir aus ihren massenhaften Überresten, die sich als Mumien oder als Knochen teils in den noch unzerstörten Höhlen finden, welche die Mumifizierung der beigesetzten, in Ziegenfelle eingenähten Leichen begünstigten, teils in den Museen der Inseln und Spaniens aufbewahrt sind. Die Überreste der Urbevölkerung erweisen ein hochwüchsiges, langschädeliges Volk mit niedrigem breiten Gesicht und breiten Augenhöhlen. Dieses Volk hat die Gestalt der Rasse von Cro-Magnon besessen. FISCHER folgt den Ausführungen, die PAUDLER in seinem Buche, „Die hellfarbigen Rassen", dargelegt hat, daß die Cro-Magnon-Rasse in Europa nicht ausgestorben sei. Er schließt sich ihm zunächst darin an, daß es wahrscheinlich sei, daß PAUDLERS Dal-Rasse einen Überrest dieser alten Menschenform darstelle, erhalten nicht nur in Skandinavien, sondern auch in vielen Teilen Mitteldeutschlands (Thüringen). Die Anerkennung dieser Dal-Rasse ergibt große, langschädelige, niedrig- und breitgesichtige, *blonde und helläugige Menschen*. Ob diese in unserer Zeit lebenden Nachkommen der Cro-Magnon-Leute blond gewesen oder erst blond geworden sind, läßt sich in Europa nicht entscheiden. Die Einwohner der Kanarischen Inseln, gemischt aus mediterranen Europäern, Berbern, Negern und anderen Einwandern, ergeben an Soldatenuntersuchungen, die FISCHER anstellen konnte, 29% über 1,70 m große, $2^1/_2$% über 1,80 m große Männer mit einer Mittelgröße von 1,65 m. Ziemlich viele Männer waren größer als FISCHER (190 cm), ein Mann von 204 cm Größe wurde uns im Bilde vorgeführt und uns dabei die so selbstverständlich liebenswürdige und dabei erfolgreiche Weise gezeigt, wie FISCHER alle Widerstände gegen anthropologische Untersuchungen überwindet, die es ihm ermöglicht hat, sowohl in seinem früheren Wirkungskreise, in Freiburg, wie in Südafrika, so auch jetzt in Norddeutschland zu anthropologischen Daten in Kreisen zu gelangen, in die außer FISCHER niemand einzudringen vermochte. Die großen Menschen besitzen außer ihrer Körpergröße noch besonders grobe Gliedmaßen, riesige Hände und Füße. Die Hautfarbe ist der Sonnenverbrennung wegen nicht festzustellen, aber unter der im allgemeinen dunkelhaarigen und dunkeläugigen spanischen Bevölkerung fand FISCHER 8,2% helläugige (neben 86,6% braunäugigen, 5% schwarzäugigen) und 11% blonde (neben 75% braunen und 14% schwarzhaarigen). Die überwiegende Langschädeligkeit (Längenbreitenindex 77) beweist nichts für Guanchenabstammung, da auch die Berber und die anderen in der Mischung der Inselbevölkerung enthaltenen Rassen langschädelig sind. FISCHER macht immer wieder auf die allgemeinen Eindrücke aufmerksam, die der zusammenfassende, anthropologisch geübte Betrachter auch ohne Messung erhält. Von dieser Art fand er viel bei der kanarischen Bevölkerung, mit der er in möglichst innigen Konnex bei seinem Aufenthalt auf den Inseln trat. Sind die Menschen von Cro-Magnon-Typus auf den Kanarischen Inseln blond, wie der hohe Prozentsatz helläugigblonder erweist, so muß die Rasse von vornherein blond gewesen sein, denn die alten Kanarier waren keine Mischrasse. Das spricht dafür, daß die Cro-Magnon-Rasse auch in prähistorischer Zeit blond war. Die Blondheit ist natürlich noch viel ausgebreiteter als es sich aus den als blond gezählten ergibt, denn in der dunklen Mischbevölkerung muß noch viel blond verborgen stecken, blond ist ein recessiver Erbfaktor gegenüber dunkel. Es ist also erwiesen, daß die blonde Cro-Magnon-Urbevölkerung absolut nicht ausgerottet, sondern noch in großen Zügen vorhanden ist: zumal, wie STAUDINGER in der Diskussion hinzufügt, die Guanchenfrauen sicher nicht ausgerottet worden sind. So sehen wir also auch hier, daß große Teile von den Eigenschaften der verloren geglaubten alten Urbevölkerung immer wieder hervorkommen (herausmendeln) und sich im modernen Menschen erhalten. F. PINKUS.

In der Sitzung der **Berliner Anthropologischen Gesellschaft** vom 18. Oktober 1930 demonstrierte WEINERT die Bilder eines zweiten Schädels des Pithecanthropus, der von BLACK in der Nähe von Peking gefunden und mit dem Namen Sinanthropus pekinensis bezeichnet worden ist. WEINERT fand an diesem Schädel, welcher in größeren Teilen erhalten ist als die berühmte Schädelkalotte des ersten, von EUGEN DUBOIS in Trinil gefundenen Pithecanthropus, die Bestätigung seiner eigenen Ergänzung jenes ersten Schädels. Beschreibungen und Bilder dieses zweiten Fundes erhielt er von dem Finder und trug an Hand dieser Mitteilungen alles, was bisher über diesen wichtigen Fund zu eruieren war, vor, in Anbetracht der Wichtigkeit der genauen Publikation und der Betrachtung des Fundobjektes selbst vorgreifend. Der neue Schädel zeigt nur ganz geringe Abweichungen von dem alten, seit 40 Jahren schon bekannten. Der Umriß ist ein klein wenig größer, und es ist etwas mehr von den Augenbrauenbögen, vom Hinterhaupt und der Schläfen-

gegend erhalten. Die Basis, die Gegend um das Hinterhauptloch und das Gesicht, ist aber auch von diesem zweiten Schädel nicht vorhanden. Man sah die längliche Schädelkapsel mit den großen Augenbrauenwülsten, die schmale Einziehung der Schläfengegend hinter ihnen, die Suturen zwischen Stirnbein und Seitenwandbeinen, die dorsale Naht zwischen den beiden Seitenwandbeinen. Die Hinterhauptsabknickung ist bei beiden Schädeln dieselbe. Der Schädelinhalt mag 1000 ccm sein; was von der Gehirnkapsel fehlt, enthielt die unteren Gehirnteile, es deutet also dieser Schädel kein menschenähnlicheres Verhalten an als der erste Schädel, da die Entwicklung des Großhirns eine obere Ausbuchtung voraussetzen würde. Der Längenbreitenindex beider Schädel ist 55 (amerikanische Affen 60—72, Meerkatze 60—73, Gibbon 60—75, Orang 70, Gorilla 63, Schimpanse 65—77, Neandertaler 60—65, rezenter Mensch 68—86, meistens 70—75). Der Abstand der Schädelgröße vom Neandertaler Menschen ist noch groß, größer aber ist der Abstand vom Schimpansen als vom Neandertaler. Der Schädel erscheint schimpansoid, die Ähnlichkeit mit den Schädeln der übrigen Menschenaffen ist viel geringer. Dieser Fund beweist, daß der Pithecanthropus weit über Asien hin verbreitet gewesen sein muß. Die Unterkiefergelenke des neuen Schädels liegen transversal, doch bedeutet das nichts für äffische oder menschenähnliche Deutung, da auch beim Schimpansen diese Gelenkflächen nicht immer transversal liegen, sondern oft, wie beim Menschen, schräg, in der Verlängerung hinten sich schneidend. Bei der außerordentlichen Übereinstimmung der beiden Schädel, desjenigen von Dubois und des Blackschen, hält Weinert den Namen, welchen Black seinem Fund gegeben hat, für unberechtigt und wird dabei von Virchow und Fischer unterstützt, so daß nach zoologischer Nomenklatur der Name nicht Sinanthropus pekinensis, sondern besser Pithecanthropus sinensis oder direkt nach dem genauen Fundort wäre. Die Fundschicht läßt sich nicht genau bestimmen: Weinert ist der Ansicht, daß es sich nicht um tertiäre Schichten, sondern um Diluvium handele, so daß die Entwicklung des Menschen sich vollständig im Quartär abgespielt haben müsse. Die Zeitbestimmung könne aber um 1—2 Zwischeneiszeiten differieren. Der Pithecanthropus sei als primitiver anzusehen als der Homo Heidelbergensis. Eher bestände eine Beziehung zum Piltdown-Unterkiefer. F. Pinkus.

Starkes Auftreten von Fichtenkreuzschnäbeln (Loxia curvirostra L.) im Danziger Freistaat. Der milde Winter des Jahres 1929/30 brachte uns Bewohnern des Danziger Freistaats wenig Absonderliches. Das Vogelleben war damals normal; nordische Sperlingsvögel stellten sich in der gewohnten Zahl ein, jedenfalls viel mehr als in dem bitterkalten Winter des Vorjahres. Vertreter der meisten Arten, die hier in Frage kommen, zogen heuer in meine Vogelstube ein. Dagegen brachte uns der Frühsommer 1930 ein für unseren Gau recht seltenes Ereignis, einen auffallend starken Strich von Kreuzschnäbeln.

Um diesen Vorgang recht zu würdigen, müssen wir von der Tatsache ausgehen, daß zu beiden Seiten der unteren Weichsel, im Regenschatten der pommerellischen Höhe, ein weites Gebiet liegt, wo infolge des trockenen Klimas die Fichte *nicht* urwüchsig ist. Deshalb war noch vor 50 Jahren der Kreuzschnabel dort recht selten. Er kam wohl als Strichvogel vor, fehlte aber gewöhnlich so sehr, daß die Danziger Vogelfänger ihn nicht kannten, und daß auch solche Vogelpfleger, die mit allen Fängern der Stadt gute Beziehungen unterhielten, sich ihre Kreuzschnäbel von auswärts kommen ließen.

Seitdem trat eine starke Pinifizierung, vor allem der Olivaer Wälder, ein. War früher der Fichtenhorst am Olivaer Kohlenweg als ganz eigenartig ein Wanderziel der Danziger gewesen, so entstanden nun allerorten ähnliche Bestände. Damit bürgerte sich auch der Kreuzschnabel ein, der in den letzten 20 Jahren den Anwohnern des Waldes als ständiger Nachbar bekannt wurde. Immerhin hielt sich seine Zahl, dem örtlichen Nahrungsspielraum entsprechend, in engen Grenzen.

Um so auffälliger waren die Kreuzschnabelschwärme dieses Jahres. Nach der Art ihres Umherziehens mußte man sie als Strichvögel bezeichnen. Selbst in solchem Gelände, das mit ihrem eigentlichen Wohnraum gar nichts gemein hat, schienen sie nicht wirklich weite Strecken durchmessen zu wollen, sondern bewegten sich ersichtlich auf *engem* Raum.

Als die Kreuzschnäbel zuerst, in Flügen bis zu 80 Stück, unser Königstal überflogen, das wegen seiner Vegetation *kein* Kreuzschnabelland ist, wehrte ich mich trotz ihres mir wohlbekannten Lockrufs anfangs gegen die Vorstellung, daß ich diese Vogelart vor mir hätte. Aber bald trug man mir verletzte Vögel zu, durfte ich auf Sportplätzen, Friedhöfen und in Obstgärten die Strichvögel aus allergrößter Nähe beobachten. Manche Flüge hatten sich im Weichbild der Stadt aufgelöst, so daß nunmehr die Vögel einzeln oder in Gruppen in einem Gelände hausten, mit dem sie in ökologischer Hinsicht sonst nichts zu tun haben. Wir erkennen daraus die Gefahren, welche moderne Großstadtsiedelungen dem Nachwuchs solcher Arten bringen, denn diese Vögel dürften fast ausnahmslos umkommen. Sind *streifende* Jungvögel selbst im artgerechten Gelände gefährdet, so verschlechtert sich ihre Lage in solch fremder Welt noch viel mehr.

Weil gerade heuer wieder Berichte von Lemmingheeren (Myodes lemnus Palles) veröffentlicht werden, die sich auf der Reise gen Süden todwandern, liegt es nahe, diese Kreuzschnabelflüge mit jenen Vorgängen in begriffliche Verbindung zu bringen. Wenn diese Scharen, die bei guter Zapfenernte über den Durchschnittsbestand der Art erzeugt werden, auch nicht wie die Lemminge stets bis aufs letzte Stück zugrundegehen, so handelt es sich dabei praktisch doch auch um ein Totwandern. Ich persönlich glaube kaum, daß 10% der Zugvögel, die neulich über unser Königstal flogen, jemals zur Fortpflanzung gelangen.

Es ist erklärlich, daß solche Erscheinungen die Aufmerksamkeit des Ornithologen in höchstem Maße erregen müssen. Weckt doch schon der Umstand seine Teilnahme, daß er eine Vogelart an solchen Stätten ausgiebigst beobachten darf, die mit ihrer gewohnten Umwelt nichts gemein hat. Meiner Ansicht nach besteht aber der größte Wert solcher Vorgänge in einer logischen Folgerung, zu der sie den Forscher zwingen. Sie zeigen ihm, daß der Ornithologe, der eine Lokalornis schildert, uns nichts Dauerndes, nichts ein für allemal Gegebenes vorführt, sondern daß er gut tut, immer daran zu denken, daß er schließlich nur einen *Beitrag zur Geschichte* der Ornis eines bestimmten Erdraumes liefert. Fritz Braun.

Herausgeber und verantwortlicher Schriftleiter: Dr.-Ing. e. h. DR. ARNOLD BERLINER, Berlin W 9
Verlag von Julius Springer in Berlin W 9. — Druck der Spamerschen Buchdruckerei in Leipzig.